L'ESPACE ET SES TROIS DIMENSIONS

§ 1. — Introduction.

Dans les articles que j'ai précédemment consacrés à l'espace, j'ai surtout insisté sur les problèmes soulevés par la géométrie non-euclidienne, en laissant presque complètement de côté d'autres questions plus difficiles à aborder, telles que celles qui se rapportent au nombre des dimensions. Toutes les géométries que j'envisageais avaient ainsi un fond commun, ce continuum à trois dimensions qui était le même pour toutes et qui ne se différenciait que par les figures qu'on y traçait ou quand on prétendait le mesurer.

Dans ce continuum, primitivement amorphe, on peut imaginer un réseau de lignes et de surfaces, on peut convenir ensuite de regarder les mailles de ce réseau comme égales entre elles, et c'est seulement après cette convention que ce continuum, devenu mesurable, devient l'espace euclidien ou l'espace non-euclidien. De ce continuum amorphe peut donc sortir indifféremment l'un ou l'autre des deux espaces, de même que sur une feuille de papier blanc on peut tracer indifféremment une droite ou un cercle.

Dans l'espace nous connaissons des triangles rectilignes dont la somme des angles est égale à deux droits; mais nous connaissons également des triangles curvilignes dont la somme des angles est plus petite que deux droits. L'existence des uns n'est pas plus douteuse que celle des autres. Donner aux côtés des premiers le nom de droites, c'est adopter la géométrie euclidienne; donner aux côtés des derniers le nom de droites, c'est adopter la géométrie non-euclidienne. De sorte que, demander quelle géométrie convient-il d'adopter, c'est demander : à quelle ligne convient-il de donner le nom de droite?

Il est évident que l'expérience ne peut résoudre une pareille question; on ne demanderait pas, par exemple, à l'expérience de décider si je dois appeler une droite AB ou bien CD. D'un autre côté, je ne puis dire non plus que je n'ai pas le droit de donner le nom de droites aux côtés des triangles non-euclidiens, parce qu'ils ne sont pas conformes à l'idée éternelle de droite que je possède par intuition. Je veux bien que j'aie l'idée intuitive du côté du triangle euclidien, mais j'ai également l'idée intuitive du côté du triangle non-euclidien. Pourquoi aurai-je le droit d'appliquer le nom de droite à la première de ces idées et pas à la seconde? En quoi ces deux syllabes feraient-elles partie intégrante de cette idée intuitive? Évidemment quand nous disons que la droite euclidienne est une *vraie* droite et que la droite non-euclidienne n'est pas une vraie droite, nous voulons dire tout simplement que la première idée intuitive correspond à un objet *plus remarquable* que la seconde. Mais comment jugeons-nous que cet objet est plus remarquable? C'est ce que j'ai recherché dans les articles précédents.

C'est là que nous avons vu intervenir l'expérience; si la droite euclidienne est plus remarquable que la droite non-euclidienne, c'est avant tout qu'elle diffère peu de certains objets naturels remarquables dont la droite non-euclidienne diffère beaucoup. Mais, dira-t-on, la définition de la droite non-euclidienne est artificielle; essayons un instant de l'adopter, nous verrons que deux cercles de rayon différent recevront tous deux le nom de droites non-euclidiennes, tandis que de deux cercles de même rayon, l'un pourra satisfaire à la définition sans que l'autre y satisfasse, et alors si nous transportons une de ces soi-disant droites sans la déformer elle cessera d'être une droite. Mais de quel droit considérons-nous comme égales ces deux figures que les géomètres euclidiens appellent deux cercles de même rayon? C'est parce qu'en transportant l'une d'elles sans la déformer on peut la faire coïncider avec l'autre. Et pourquoi disons-nous que ce transport s'est effectué sans déformation? Il est impossible d'en donner une bonne raison. Parmi tous les mouvements concevables, il y en a dont les géomètres euclidiens disent qu'ils ne sont pas accompagnés de déformation; mais il y en a d'autres dont les géomètres non-euclidiens diraient qu'ils ne sont pas accompagnés de déformation. Dans les premiers, dits mouvements euclidiens, les droites euclidiennes restent des droites euclidiennes, et les droites non-euclidiennes ne restent pas des droites non-euclidiennes; dans les mouvements de la seconde sorte, ou mouvements non-euclidiens, les droites non-euclidiennes restent des droites non-euclidiennes et les droites euclidiennes ne restent pas des droites euclidiennes. On n'a donc pas démontré qu'il était déraisonnable d'appeler droites les côtés des triangles non-euclidiens; on a démontré seulement que cela serait déraisonnable si on continuait d'appeler mouvements sans déformation les mouvements euclidiens; mais on aurait montré tout aussi bien qu'il serait déraisonnable d'appeler droites les côtés des triangles euclidiens si l'on appelait mouvements sans déformation les mouvements non-euclidiens.

Maintenant quand nous disons que les mouvements euclidiens sont les *vrais* mouvements sans déformation, que voulons-nous dire? Nous voulons dire simplement qu'ils sont *plus remarquables* que les autres; et pourquoi sont-ils plus remarquables? c'est parce que certains corps naturels remarquables, les corps solides, subissent des mouvements à peu près pareils.

Et alors quand nous demandons : peut-on imaginer l'espace non-euclidien? cela veut dire : pouvons-nous imaginer un monde où il y aurait des objets naturels remarquables affectant à peu près la forme des droites non-euclidiennes, et des corps naturels remarquables subissant fréquemment des mouvements à peu près pareils aux mouvements non-euclidiens? J'ai discuté la question dans mes articles antérieurs.

On a souvent observé que si tous les corps de l'Univers venaient à se dilater simultanément et dans la même proportion, nous n'aurions aucun moyen de nous en apercevoir, puisque tous nos instruments de mesure grandiraient en même temps que les objets mêmes qu'ils servent à mesurer. Le monde, après cette dilatation, continuerait son train sans que rien vienne nous avertir d'un événement aussi considérable.

En d'autres termes, deux mondes qui seraient semblables l'un à l'autre (en entendant le mot similitude au sens du 3e livre de géométrie) seraient absolument indiscernables. Mais il y a plus, non seulement deux mondes seront indiscernables s'ils sont égaux ou semblables, c'est-à-dire si l'on peut passer de l'un à l'autre en changeant les axes de coordonnées, ou en changeant l'échelle à laquelle sont rapportées les longueurs; mais ils seront encore indiscernables si l'on peut passer de l'un à l'autre par une « transformation ponctuelle » quelconque. Je m'explique. Je suppose qu'à chaque point de l'un corresponde un point de l'autre et un seul, et inversement; et de plus que les coordonnées d'un point soient des fonctions continues, *d'ailleurs tout à fait quelconques*, des coordonnées du point correspondant. Je suppose d'autre part qu'à chaque objet du premier monde, corresponde dans le second un objet de même nature placé précisément au point correspondant. Je suppose enfin que cette correspondance réalisée à l'instant initial, se conserve indéfiniment. Nous n'aurions aucun moyen de discerner ces deux mondes l'un de l'autre. Quand on parle de la *relativité de l'espace*, on ne l'entend pas d'ordinaire dans un sens aussi large; c'est ainsi cependant qu'il conviendrait de l'entendre.

Si l'un de ces univers est notre monde-euclidien, ce que ses habitants appelleront droite, ce sera notre droite euclidienne; mais ce que les habitants du second monde appelleront droite, ce sera une courbe qui jouira des mêmes propriétés par rapport au monde qu'ils habitent et par rapport aux mouvements qu'ils appelleront mouvements sans déformation; leur géométrie sera donc la géométrie euclidienne, mais leur droite ne sera pas notre droite euclidienne, ce sera sa transformée par la transformation ponctuelle qui fait passer de notre monde au leur; les droites de ces hommes ne seront pas nos droites, mais elles auront entre elles les mêmes rapports que nos droites entre elles, c'est dans ce sens que je dis que leur géométrie sera la nôtre. Si alors nous voulons à toute force proclamer qu'ils se trompent, que leur droite n'est pas la vraie droite, si nous ne voulons pas confesser qu'une pareille affirmation n'a aucun sens, du moins devrons-nous avouer que ces gens n'ont aucune espèce de moyen de s'apercevoir de leur erreur.

§ 2. — La Géométrie Qualitative.

Tout cela est relativement facile à comprendre et je l'ai déjà si souvent répété que je crois inutile de m'étendre davantage sur ce sujet. L'espace euclidien n'est pas une forme imposée à notre sensibilité, puisque nous pouvons imaginer l'espace non-euclidien; mais les deux espaces euclidien et non-euclidien ont un fond commun, c'est ce continuum amorphe dont je parlais au début; de ce continuum nous pouvons tirer soit l'espace euclidien, soit l'espace lobatchewskien, de même que nous pouvons, en y traçant une graduation convenable, transformer un thermomètre non gradué soit en thermomètre Fahrenheit, soit en thermomètre Réaumur.

Et alors une question se pose : ce continuum amorphe, que notre analyse a laissé subsister, n'est-il pas une forme imposée à notre sensibilité? Nous aurions élargi la prison dans laquelle cette sensibilité est enfermée, mais ce serait toujours une prison.

Ce continu possède un certain nombre de propriétés, exemptes de toute idée de mesure. L'étude de ces propriétés est l'objet d'une science qui a été cultivée par plusieurs grands géomètres et en particulier par Riemann et Betti et qui a reçu le nom d'Analysis Sitûs. Dans cette science, on fait abstraction de toute idée quantitative et par exemple, si on constate que sur une ligne le point B est entre les points A et C, on se contentera de cette constatation et on ne s'inquiétera pas de savoir si la ligne ABC est droite ou courbe, ni si la longueur AB est égale à la longueur BC, ou si elle est deux fois plus grande.

Les théorèmes de l'Analysis Sitûs ont donc ceci de particulier qu'ils resteraient vrais si les figures étaient copiées par un dessinateur malhabile qui altérerait grossièrement toutes les proportions et remplacerait les droites par des lignes plus ou moins sinueuses. En termes mathématiques, ils ne sont pas altérés par une « transformation ponctuelle » quelconque. On a dit souvent que la géométrie métrique était quantitative, tandis que la géométrie projective était purement qualitative ; cela n'est pas tout à fait vrai : ce qui distingue la droite des autres lignes, ce sont encore des propriétés qui restent quantitatives à certains égards. La véritable géométrie qualitative c'est donc l'Analysis Sitûs.

Les mêmes questions qui se posaient à propos des vérités de la géométrie euclidienne, se posent de nouveau à propos des théorèmes de l'Analysis Sitûs. Peuvent-ils être obtenus par un raisonnement déductif? Sont-ce des conventions déguisées? Sont-ce des vérités expérimentales? Sont-ils les caractères d'une forme imposée soit à notre sensibilité, soit à notre entendement?

Je veux simplement observer que les deux dernières solutions s'excluent, ce dont tout le monde ne s'est pas toujours bien rendu compte. Nous ne pouvons pas admettre à la fois qu'il est impossible d'imaginer l'espace à quatre dimensions et que l'expérience nous démontre que l'espace a trois dimensions. L'expérimentateur pose à la nature une interrogation : est-ce ceci ou cela? et il ne peut la poser sans imaginer les deux termes de l'alternative. S'il était impossible de s'imaginer l'un de ces termes, il serait inutile et d'ailleurs impossible de consulter l'expérience. Nous n'avons pas besoin d'observation pour savoir que l'aiguille d'une horloge n'est pas sur la division 15 du cadran, puisque nons savons d'avance qu'il n'y en a que 12, et nous ne pourrions pas regarder à la division 15 pour voir si l'aiguille s'y trouve, puisque cette division n'existe pas.

Remarquons également qu'ici les empiristes sont débarrassés de l'une des objections les plus graves qu'on peut diriger contre eux, de celle qui rend absolument vains d'avance tous leurs efforts pour appliquer leur thèse aux vérités de la géométrie euclidienne. Ces vérités sont rigoureuses et toute expérience ne peut être qu'approchée. En Analysis Sitûs les expériences approchées peuvent suffire pour donner un théorème rigoureux et, par exemple, si l'on voit que l'espace ne peut avoir ni deux ou moins de deux dimensions, ni quatre ou plus de quatre, on est certain qu'il en a exactement 3, car il ne saurait en avoir 2 et demi ou 3 et demi.

De tous les théorèmes de l'Analysis Sitûs, le plus important est celui que l'on exprime en disant que l'espace a trois dimensions. C'est de celui-là que nous allons nous occuper, et nous poserons la question en ces termes : Quand nous disons que l'espace a trois dimensions, qu'est-ce que nous voulons dire?

§ 3. — Le Continu Physique a plusieurs Dimensions.

J'ai expliqué dans un article antérieur d'où nous vient la notion de la continuité physique et comment a pu en sortir celle de la continuité mathématique. Il arrive que nous sommes capables de distinguer deux impressions l'une de l'autre, tandis que nous ne saurions distinguer chacune d'elles d'une même troisième. C'est ainsi que nous pouvons discerner facilement un poids de 12 grammes d'un poids de 10 grammes, tandis qu'un poids de 11 grammes ne saurait se distinguer ni de l'un, ni de l'autre.

Une pareille constatation, traduite en symboles, s'écrirait :

$$A = B,\ B = C,\ A < C.$$

Ce serait là la formule du continu physique, tel que nous le donne l'expérience brute, d'où une contradiction intolérable que l'on a levée par l'introduction du continu mathématique. Celui-ci est une échelle dont les échelons (nombres commensurables ou incommensurables) sont en nombre infini, mais sont extérieurs les uns aux autres, au lieu d'empiéter les uns sur les autres comme le font, conformément à la formule précédente, les éléments du continu physique.

Le continu physique est pour ainsi dire une nébuleuse non résolue, les instruments les plus perfectionnés ne pourraient parvenir à la résoudre; sans doute si on évaluait les poids avec une bonne balance, au lieu de les apprécier à la main, on distinguerait le poids de 11 grammes de ceux de 10 et de 12 grammes et notre formule deviendrait :

$$A < B, B < C, A < C.$$

Mais on trouverait toujours entre A et B et entre B et C de nouveaux éléments D et E tels que :

$$A = D, D = B, A < B; B = E, E = C, B < C,$$

et la difficulté n'aurait fait que reculer et la nébuleuse ne serait toujours pas résolue; c'est l'esprit seul qui peut la résoudre et c'est le continu mathématique qui est la nébuleuse résolue en étoiles.

Jusqu'à présent toutefois nous n'avons pas introduit la notion du nombre des dimensions. Que voulons-nous dire quand nous disons qu'un continu mathématique ou qu'un continu physique a deux ou trois dimensions?

Il faut d'abord que nous introduisions la notion de *coupure*, en nous attachant d'abord à l'étude des continus physiques. Nous avons vu ce qui caractérise le continu physique, chacun des éléments de ce continu consiste en un ensemble d'impressions; et il peut arriver ou bien qu'un élément ne peut pas être discerné d'un autre élément du même continu, si ce nouvel élément correspond à un ensemble d'impressions trop peu différentes, ou bien au contraire que la distinction est possible; enfin il peut se faire que deux éléments, indiscernables d'un même troisième, peuvent néanmoins être discernés l'un de l'autre.

Cela posé, si A et B sont deux éléments discernables d'un continu C, on pourra trouver une série d'éléments

$$E_1, E_2, \ldots.., E_n$$

appartenant tous à ce même continu C et tels que chacun d'eux est indiscernable du précédent, que E_1 est indiscernable de A et E_n indiscernable de B. On pourra donc aller de A à B par un chemin continu et sans quitter C. Si cette condition est remplie pour deux éléments quelconques A et B du continu C, nous pourrons dire que ce continu C est *d'un seul tenant.*

Distinguons maintenant quelques-uns des éléments de C qui pourront ou bien être tous discernables les uns des autres, ou former eux-mêmes un ou plusieurs continus. L'ensemble des éléments ainsi choisis arbitrairement parmi tous ceux de C formera ce que j'appellerai la ou les *coupures.*

Reprenons sur C deux éléments quelconques A et B. Ou bien nous pourrons encore trouver une série d'éléments

$$E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$$

tels : 1° qu'ils appartiennent tous à C; 2° que chacun d'eux soit indiscernable du suivant; E_1 indiscernable de A et E_n de B; 3° *et en outre qu'aucun des éléments E ne soit indiscernable d'aucun des éléments de la coupure.* Ou bien au contraire dans toutes les séries E_1, E_2, ..., E_n satisfaisant aux deux premières conditions, il y aura un élément E indiscernable de l'un des éléments de la coupure.

Dans le 1er cas, nous pouvons aller de A à B par un chemin continu sans quitter C et *sans rencontrer les coupures*; dans le second cas cela est impossible.

Si alors pour deux éléments quelconques A et B du continu C, c'est toujours le premier cas qui se présente, nous dirons que C reste d'un seul tenant malgré les coupures.

Ainsi si nous choisissons les coupures d'une certaine manière, d'ailleurs arbitraire, il pourra se faire ou bien que le continu reste d'un seul tenant ou qu'il ne reste pas d'un seul tenant; dans cette dernière hypothèse nous dirons alors qu'il est *divisé* par les coupures.

On remarquera que toutes ces définitions sont construites en partant uniquement de ce fait très simple, que deux ensembles d'impressions, tantôt peuvent être discernés, tantôt ne peuvent pas l'être.

Cela posé, si pour *diviser* un continu, il suffit de considérer comme coupures un certain nombre d'éléments tous discernables les uns des autres, on dit que ce continu est *à une dimension*; si au contraire pour diviser un continu, il est nécessaire de considérer comme coupures un système d'éléments formant eux-mêmes un ou plusieurs continus, nous dirons que ce continu est *à plusieurs dimensions*.

Si pour diviser un continu C, il suffit de coupures formant un ou plusieurs continus à une dimension, nous dirons que C est un continu *à deux dimensions*; s'il suffit de coupures, formant un ou plusieurs continus à deux dimensions au plus, nous dirons que C est un continu *à trois dimensions*; et ainsi de suite.

Pour justifier cette définition, il faut voir si c'est bien ainsi que les géomètres introduisent la notion des trois dimensions au début de leurs ouvrages. Or que voyons-nous? Le plus souvent ils commencent par définir les surfaces comme les limites des volumes, ou parties de l'espace, les lignes comme les limites des surfaces, les points comme limites des lignes, et ils affirment que le même processus ne peut être poussé plus loin.

C'est bien la même idée; pour diviser l'espace, il faut des coupures que l'on appelle surfaces; pour diviser les surfaces il faut des coupures que l'on appelle lignes; pour diviser les lignes, il faut des coupures que l'on appelle points; on ne peut aller plus loin et le point ne peut être divisé, le point n'est pas un continu; alors les lignes, qu'on peut diviser par des coupures qui ne sont pas des continus, seront des continus à une dimension; les surfaces que l'on peut diviser par des coupures continues à une dimension, seront des continus à deux dimensions, enfin l'espace que l'on peut diviser par des coupures continues à deux dimensions sera un continu à trois dimensions.

Ainsi la définition que je viens de donner ne diffère pas essentiellement des définitions habituelles; j'ai tenu seulement à lui donner une forme applicable non au continu mathématique, mais au continu physique, qui est seul susceptible de représentation et cependant à lui conserver toute sa précision.

On voit, d'ailleurs, que cette définition ne s'applique pas seulement à l'espace, que dans tout ce qui tombe sous nos sens, nous retrouvons les caractères du continu physique, ce qui permettrait la même classification; il serait aisé d'y trouver des exemples de continus de quatre, de cinq dimensions, au sens de la définition précédente; ces exemples se présentent d'eux-mêmes à l'esprit.

J'expliquerais enfin, si j'en avais le temps, que cette science dont je parlais plus haut et à laquelle Riemann a donné le nom d'Analysis

Sitûs, nous apprend à faire des distinctions parmi les continus d'un même nombre de dimensions et que la classification de ces continus repose encore sur la considération des coupures.

De cette notion est sortie celle du continu mathématique à plusieurs dimensions de la même façon que le continu physique à une dimension avait engendré le continu mathématique à une dimension. La formule

$$A > C, \; A = B, \; B = C$$

qui résumait les données brutes de l'expérience impliquait une contradiction intolérable. Pour s'en affranchir, il a fallu introduire une notion nouvelle en respectant d'ailleurs les caractères essentiels du continu physique à plusieurs dimensions. Le continu mathématique à une dimension comportait une échelle unique dont les échelons en nombre infini correspondaient aux diverses valeurs commensurables ou non d'une même grandeur. Pour avoir le continu mathématique à n dimensions, il suffira de prendre n pareilles échelles dont les échelons correspondront aux diverses valeurs de n grandeurs indépendantes appelées coordonnées. On aura ainsi une image du continu physique à n dimensions, et cette image sera aussi fidèle qu'elle peut l'être du moment qu'on ne veut pas laisser subsister la contradiction dont je parlais plus haut.

§ 4. — La Notion de Point.

Il semble maintenant que la question que nous nous posions au début est résolue. Quand nous disons que l'espace a trois dimensions, dira-t-on, nous voulons dire que l'ensemble des points de l'espace satisfait à la définition que nous venons de donner du continu physique à trois dimensions. Se contenter de cela, ce serait supposer que nous savons ce que c'est que l'ensemble des points de l'espace, ou même qu'un point de l'espace.

Or cela n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire. Tout le monde croit savoir ce que c'est qu'un point, et c'est même parce que nous le savons trop bien que nous croyons n'avoir pas besoin de le définir. Certes on ne peut pas exiger de nous que nous sachions le définir, car en remontant de définition en définition il faut bien qu'il arrive un moment où l'on s'arrête. Mais à quel moment doit-on s'arrêter?

On s'arrêtera d'abord quand on arrivera à un objet qui tombe sous nos sens ou que nous pouvons nous représenter; la définition deviendra alors inutile, on ne définit pas le mouton à un enfant, on lui dit : *voici* un mouton.

Et alors nous devons nous demander s'il est possible de se représenter un point de l'espace. Ceux qui répondent oui ne réfléchissent pas qu'ils se représentent en réalité un point blanc fait avec la craie sur un tableau noir ou un point noir fait avec la plume sur un papier blanc, et qu'ils ne peuvent se représenter qu'un objet ou mieux les impressions que cet objet ferait sur leurs sens.

Quand ils cherchent à se représenter un point, ils se représentent les impressions que leur feraient éprouver des objets très petits. Il est inutile d'ajouter que deux objets différents, quoique l'un et l'autre très petits, pourront produire des impressions extrêmement différentes, mais je n'insiste pas sur cette difficulté qui exigerait pourtant quelque discussion.

Mais ce n'est pas de cela qu'il s'agit; il ne suffit pas de se représenter *un* point, il faut se représenter *tel* point et avoir le moyen de le distinguer d'un *autre* point. Et en effet, pour que nous puissions appliquer à un continu la règle que j'ai exposée plus haut et par laquelle on peut reconnaître le nombre de ses dimensions, et nous devons nous appuyer sur ce fait que deux éléments de ce continu tantôt peuvent et tantôt ne peuvent pas être discernés. Il faut donc que nous sachions dans certains cas nous représenter *tel* élément et le distinguer d'un *autre* élément.

La question est de savoir si le point que je me représentais il y a une heure, est le même que celui que je me représente maintenant ou si c'est un point différent. En d'autres termes, comment savons-nous si le point occupé par l'objet A à l'instant α est le même que le point occupé par l'objet B à l'instant β, ou mieux encore, qu'est-ce que cela veut dire?

Je suis assis dans ma chambre, un objet est posé sur ma table; je ne bouge pas pendant une seconde, personne ne touche à l'objet; je suis tenté de dire que le point A qu'occupait cet objet au début de cette seconde est identique au point B qu'il occupe à la fin; pas du tout : du point A au point B il y a 30 kilomètres, car l'objet a été entraîné dans le mouvement de la Terre. Nous ne pourrons savoir si un objet, très petit ou non, n'a pas changé de position absolue dans l'espace, et non seulement nous ne pouvons l'affirmer, mais cette affirmation n'a aucun sens et en tout cas ne peut correspondre à aucune représentation.

Mais alors nous pouvons nous demander si la position relative d'un objet par rapport à d'autres objets a varié ou non, et d'abord si la position relative de cet objet par rapport à notre corps a varié; si les impressions que nous cause cet objet n'ont pas changé, nous serons enclins à juger que cette position relative n'a pas changé non plus; si elles ont changé, nous jugerons que cet objet a changé soit d'état, soit de position relative. Il reste à décider lequel des deux. J'ai expliqué dans un article antérieur comment nous avons été amenés à distinguer les changements de position. J'y reviendrai d'ailleurs plus loin. Nous arrivons donc à savoir si la position relative d'un objet par rapport à notre corps est ou non restée la même.

Si maintenant nous voyons que deux objets ont conservé leur position relative par rapport à notre corps, nous concluons que la position relative de ces deux objets l'un par rapport à l'autre n'a pas changé; mais nous n'arrivons à cette conclusion que par un raisonnement indirect. La seule chose que nous connaissions directement c'est la position relative des objets par rapport à notre corps.

A fortiori ce n'est que par un raisonnement indirect que nous croyons savoir (et encore cette croyance est-elle trompeuse) si la position absolue de l'objet a changé.

En somme, le système d'axes de coordonnées auxquels nous rapportons naturellement tous les objets extérieurs, c'est un système d'axes invariablement lié à notre corps, et que nous transportons partout avec nous.

Il est impossible de se représenter l'espace absolu; quand je veux me représenter simultanément des objets et moi-même en mouvement dans l'espace absolu, en réalité je me représente moi-même immobile et regardant se mouvoir autour de moi divers objets et un homme qui est extérieur à moi, mais que je conviens d'appeler moi.

La difficulté sera-t-elle résolue quand on consentira à tout rapporter à ces axes liés à notre corps? Savons-nous cette fois ce que c'est qu'un point défini ainsi par sa position relative par rapport à nous. Bien des gens répondront oui et diront qu'ils « localisent » les objets extérieurs.

Qu'est-ce à dire? Localiser un objet, cela veut dire simplement se représenter les mouvements qu'il faudrait faire pour l'atteindre; je m'explique ; il ne s'agit pas de se représenter les mouvements eux-mêmes dans l'espace, mais uniquement de se représenter les sensations musculaires qui accompagnent ces mouvements et qui ne supposent pas la préexistence de la notion d'espace.

Si nous supposons deux objets différents qui viennent successivement occuper la même position relative par rapport à nous, les impressions que nous causeront ces deux objets seront très différentes; si nous les localisons au même point, c'est simplement parce qu'il faut faire les mêmes mouvements pour les atteindre; à part cela, on ne voit pas bien ce qu'ils pourraient avoir de commun.

Mais, étant donné un objet, on peut concevoir plusieurs séries différentes de mouvements qui permettraient également de l'atteindre. Si alors nous nous représentons un point, en nous représentant la série des sensations musculaires qui accompagneraient les mouvements qui permettraient d'atteindre ce point, on aura plusieurs manières entièrement différentes de se représenter un même point. Si l'on ne veut pas se contenter de cette solution, si on veut faire intervenir par exemple les sensations visuelles à côté des sensations musculaires on aura une ou deux manières de plus de se représenter ce même point et la difficulté n'aura fait qu'augmenter. De toutes façons, la question suivante se pose : pourquoi jugeons-nous que toutes ces représentations si différentes les unes des autres représentent pourtant un même point?

Autre remarque : je viens de dire que c'est à notre propre corps que nous rapportons naturellement les objets extérieurs; que nous transportons pour ainsi dire partout avec nous un système d'axes auxquels nous rapportons tous les points de l'espace, et que ce système d'axes est comme invariablement lié à notre corps. On doit observer que rigoureusement l'on ne pourrait parler d'axes invariablement liés au corps que si les diverses parties de ce corps étaient elles-mêmes invariablement liées l'une à l'autre. Comme il n'en est pas ainsi, nous devons, avant de rapporter les objets extérieurs à ces axes fictifs, supposer notre corps ramené à la même attitude.

§ 5. — La Notion de Déplacement.

J'ai montré dans un article antérieur le rôle prépondérant joué par les mouvements de notre corps dans la genèse de la notion d'espace. Pour un être complètement immobile, il n'y aurait ni espace, ni géométrie; c'est en vain qu'autour de lui les objets extérieurs se déplaceraient, les variations que ces déplacements feraient subir à ses impressions, ne seraient pas attribuées par cet être à des changements de position, mais à de simples changements d'état, cet être n'aurait aucun moyen de distinguer ces deux sortes de changements et cette distinction, capitale pour nous, n'aurait aucun sens pour lui.

Les mouvements que nous imprimons à nos membres ont pour effet de faire varier les impressions produites sur nos sens par les objets extérieurs; d'autres causes peuvent également les faire varier; mais nous sommes amenés à distinguer les changements produits par nos propres mouvements et nous les discernons facilement pour deux raisons : 1° parce qu'ils sont volontaires; 2° parce qu'ils sont accompagnés de sensations musculaires.

Ainsi nous répartissons naturellement les changements que peuvent subir nos impressions en deux catégories que j'ai appelées d'un nom peut-être impropre : 1° les changements internes, qui sont volontaires et accompagnés de sensations musculaires; 2° les changements externes, dont les caractères sont opposés.

Nous observons ensuite que parmi les changements externes, il y en a qui peuvent être corrigés grâce à un changement interne qui ramène tout à l'état primitif; d'autres ne peuvent pas être corrigés de la sorte (c'est ainsi que quand un objet extérieur s'est déplacé, nous pouvons en nous déplaçant nous-mêmes nous replacer par rapport à cet objet dans la même situation relative de façon à rétablir l'ensemble des impressions primitives; si cet objet ne s'est pas déplacé, mais a changé d'état, cela est impossible). De là une nouvelle distinction, parmi les changements externes : ceux qui peuvent être ainsi corrigés, nous les appelons changements de position, et les autres nous les appelons changements d'états.

Supposons, par exemple, une sphère dont un hémisphère soit bleu et l'autre rouge; elle nous présente d'abord l'hémisphère bleu; puis elle tourne sur elle-même de façon à nous présenter l'hémisphère rouge. Soit maintenant un vase sphérique contenant un liquide bleu qui devient rouge par suite d'une réaction chimique. Dans les deux cas la sensation du rouge a remplacé celle du bleu; nos sens ont éprouvé les mêmes impressions qui se sont succédé dans le même ordre, et pourtant ces deux changements sont regardés par nous comme très différents; le premier est un déplacement, le second un changement d'état. Pourquoi?

Parce que, dans le premier cas, il me suffit de tourner autour de la sphère pour me placer vis-à-vis de l'hémisphère rouge et rétablir la sensation rouge primitive.

Bien plus, si les deux hémisphères, au lieu d'être rouge et bleu, avaient été jaune et vert, comment se serait traduite pour moi la rotation de la sphère. Tout à l'heure le rouge succédait au bleu, maintenant le vert succède au jaune; et cependant je dis que les deux sphères ont éprouvé la même rotation, que l'une comme l'autre ont tourné autour de leur axe; je ne puis pourtant pas dire que le vert soit au jaune comme le rouge est au bleu; comment alors suis-je conduit à juger que les deux sphères ont subi le *même* déplacement? Evidemment, parce que, dans un cas comme dans l'autre, je puis rétablir la sensation primitive en tournant autour de la sphère, en faisant les mêmes mouvements, et je sais que j'ai fait les mêmes mouvements parce que j'ai éprouvé les mêmes sensations musculaires; pour le savoir je n'ai donc pas besoin de savoir la géométrie d'avance et de me représenter les mouvements de mon corps dans l'espace géométrique.

Autre exemple. Un objet s'est déplacé devant mon œil; son image se formait d'abord au centre de la rétine; elle se forme ensuite au bord; la sensation ancienne m'était apportée par une fibre nerveuse aboutissant au centre de la rétine; la sensation nouvelle m'est apportée par une *autre* fibre nerveuse partant du bord de la rétine; ces deux sensations sont qualitativement différentes; et sans cela, comment pourrais-je les distinguer?

Pourquoi alors suis-je conduit à juger que ces deux sensations, qualitativement différentes, représentent une même image qui s'est déplacée? C'est parce que je puis *suivre l'objet de l'œil* et, par un déplacement de l'œil volontaire et accompagné de sensations musculaires, ramener l'image au centre de la rétine et rétablir la sensation primitive.

Je suppose que l'image d'un objet rouge soit allée du centre A au bord B de la rétine, puis que l'image d'un objet bleu aille à son tour du centre A au bord B de la rétine; je jugerai que ces deux objets ont subi le *même* déplacement. Pourquoi? parce que, dans un cas comme dans l'autre, j'aurai pu rétablir la sensation primitive, et que pour cela j'aurai dû exécuter le *même* mouvement de l'œil, et je saurai que mon œil a exécuté le même mouvement parce que j'ai éprouvé les *mêmes* sensations musculaires.

Si je ne pouvais mouvoir mon œil, aurais-je quelque raison d'admettre que la sensation du rouge au centre de la rétine est à la sensation du rouge au bord de la rétine, comme celle du bleu au centre est à celle du bleu au bord. Je n'aurais que quatre sensations qualitativement différentes, et si l'on me demandait si elles sont liées par la proportion que je viens d'énoncer, la question me semblerait ridicule; tout comme si l'on me demandait s'il y a une proportion analogue entre une sensation visuelle, une sensation auditive, une sensation tactile et une sensation olfactive.

Envisageons maintenant les changements internes, c'est-à-dire ceux qui sont produits par les mouvements volontaires de notre corps et qui sont accompagnés de changements musculaires; ils donneront lieu aux deux observations suivantes, analogues à celles que nous venons de faire au sujet des changements externes.

1° Je puis supposer que mon corps se soit transporté d'un point à un autre, mais en conservant la même *attitude*; toutes les parties de ce corps ont donc conservé ou repris la même situation *relative*, bien que leur situation absolue dans l'espace ait varié; je puis supposer également que non seulement la position de mon corps a changé, mais que son attitude n'est plus la même, que par exemple mes bras qui tout à l'heure étaient repliés soient maintenant allongés.

Je dois donc distinguer les simples changements de position sans changement d'attitude, et les changements d'attitude. Les uns et les autres m'apparaissent sous forme de sensations musculaires. Comment alors suis-je amené à les distinguer? C'est que les premiers peuvent servir à corriger un changement externe, et que les autres ne le peuvent pas ou du moins ne peuvent donner qu'une correction imparfaite.

C'est là un fait que je vais expliquer, comme je l'expliquerais à quelqu'un qui saurait déjà la géométrie, mais il ne faut pas en conclure qu'il faut déjà savoir la géométrie pour faire cette distinction; avant de la savoir, je constate le fait (expérimentalement pour ainsi dire) sans pouvoir l'expliquer. Mais pour faire la distinction entre les deux sortes de changement, je n'ai pas besoin d'*expliquer* le fait, il me suffit de le *constater*.

Quoi qu'il en soit, l'explication est aisée. Supposons qu'un objet extérieur se soit déplacé; si nous voulons que les diverses parties de notre corps reprennent par rapport à cet objet leur position relative initiale, il faut que ces diverses parties aient repris également leur position relative initiale les unes par rapport aux autres. Seuls les changements internes qui satisferont à cette dernière condition, seront susceptibles de corriger le changement externe produit par le déplacement de cet objet. Si donc la position relative de mon œil par rapport à mon doigt a changé, je pourrai bien ramener l'œil dans sa situation relative initiale par rapport à l'objet et rétablir ainsi les sensations visuelles primitives, mais alors la position relative du doigt par rapport à l'objet aura changé et les sensations tactiles ne seront pas rétablies.

2° Nous constatons également qu'un même changement externe peut être corrigé par deux changements internes correspondant à des sensations musculaires différentes. Ici encore je puis faire cette constatation sans savoir la géométrie; et je n'ai pas besoin d'autre chose, mais je vais donner l'explication du fait en employant le langage géométrique. Pour passer de la position A à la position B je puis prendre plusieurs chemins. Au premier de ces chemins correspondra une série S de sensations musculaires; à un second chemin, correspondra une autre série S″ de sensations musculaires qui généralement seront complètement différentes, puisque ce seront d'autres muscles qui seront entrés en jeu.

Comment suis-je amené à regarder ces deux séries S et S″ comme correspondant à un même déplacement AB? C'est parce que ces deux séries sont susceptibles de corriger un même changement externe. A part cela, elle n'ont rien de commun.

Considérons maintenant deux changements externes : α et β qui seront par exemple la rotation d'une sphère mi-partie bleue et rouge, et celle d'une sphère mi-partie jaune et verte; ces deux changements n'ont rien de commun puisque l'un se traduit pour nous par le passage du bleu au rouge et l'autre par le passage du jaune au vert. Envisageons d'autre part deux séries de changements internes, S et S″; ils n'auront non plus rien de commun. Et cependant je dis que α et β correspondent au même déplacement, et que S et S″ correspondent aussi au même déplacement. Pourquoi? Tout simplement parce que S peut corriger β aussi bien que α et parce que α peut être corrigé par S″ aussi bien que par S. Et alors une question se pose : si j'ai constaté que S corrige α et β et que S″ corrige α, suis-je certain que S″ corrige également β? L'expérience peut seule nous apprendre si cette loi se vérifie. Si elle ne se vérifiait pas, au moins approximativement, il n'y aurait pas de géométrie, il n'y aurait pas d'espace, parce que nous n'aurions plus intérêt à classer les changements externes et internes comme je viens de le faire, et, par exemple à distinguer les changements d'état des changements de position.

Il est intéressant de voir quel a été dans tout cela le rôle de l'expérience. Elle m'a montré qu'une certaine loi se vérifie approximativement. Elle ne m'a pas appris pourtant *comment* est l'espace et qu'il satisfait à la condition dont il s'agit. Je savais en effet avant toute expérience, que l'espace satisfera à cette condition ou qu'il ne sera pas. Je ne puis pas dire non plus que l'expérience m'a appris que la géométrie est possible; je vois bien que la géométrie est possible puisqu'elle n'implique pas contradiction; l'expérience m'a appris seulement que la géométrie est utile.

§ 6. — L'ESPACE VISUEL.

Bien que les impressions motrices aient, comme je viens de l'expliquer, eu une influence tout à fait prépondérante dans la genèse de la notion d'espace qui n'aurait jamais pris naissance sans elles, il ne sera pas sans intérêt d'examiner aussi le rôle des impressions visuelles et de rechercher combien « l'espace visuel » a de dimensions, et d'appliquer pour cela à ces impressions la définition du § 3.

Une première difficulté se présente; considérons une sensation colorée rouge affectant un certain point de la rétine; et d'autre part une sensation colorée bleue affectant le même point de la rétine. Il faut bien que nous ayons quelque moyen de reconnaître que ces deux sensations, qualitativement différentes, ont quelque chose de commun. Or, d'après les considérations exposées dans le paragraphe précédent, nous n'avons pu le reconnaître que par les mouvements de l'œil et les observations auxquelles ils ont donné lieu. Si l'œil était immobile, ou si nous n'avions pas conscience de ses mouvements, nous n'aurions pu reconnaître que ces deux sensations de qualité différente avaient quelque chose de commun; nous n'aurions pu en dégager ce qui leur donne un caractère géométrique. Les sensations visuelles, sans les sensations musculaires, n'auraient donc rien de géométrique, de sorte qu'on peut dire qu'il n'y a pas d'espace visuel pur.

Pour lever cette difficulté, n'envisageons que des sensations de même nature, des sensations rouges, par exemple, ne différant les unes des autres que par le point de la rétine qu'elles affectent. Il est clair que je n'ai aucune raison pour faire un choix aussi arbitraire parmi toutes les sensations visuelles possibles, pour réunir dans une même classe toutes les sensations de même couleur, quel que soit le point de la rétine affecté. Je n'y aurais jamais songé, si je n'avais pas appris d'avance, par le moyen que nous venons de voir, à distinguer les changements d'état des changements de position, c'est-à-dire si mon œil était immobile. Deux sensations de même couleur affectant deux parties différentes de la rétine m'apparaîtraient comme qualitativement distinctes, au même titre que deux sensations de couleur différente.

En me restreignant aux sensations rouges, je m'impose donc une limitation artificielle et je néglige systématiquement tout un côté de la question; mais ce n'est que par cet artifice que je puis analyser l'espace visuel sans y mêler de sensation motrice.

Imaginons une ligne tracée sur la rétine, et divisant en deux sa surface; et mettons à part les sensations rouges affectant un point de cette ligne, ou celles qui en diffèrent trop peu pour en pouvoir être discernées. L'ensemble de ces sensations formera une sorte de coupure que j'appellerai C, et il est clair que cette coupure suffit pour diviser l'ensemble des sensations rouges possibles, et que si je prends deux sensations rouges affectant deux points situés de part et d'autre de la ligne, je ne pourrai passer de l'une de ces sensations à l'autre d'une manière continue sans passer à un certain moment par une sensation appartenant à la coupure.

Si donc la coupure a n dimensions, l'ensemble total de mes sensations rouges ou, si l'on veut, l'espace visuel total en aura $n+1$.

Maintenant, je distingue les sensations rouges affectant un point de la coupure C. L'ensemble de ces sensations formera une nouvelle coupure C′. Il est clair que celle-ci *divisera* la coupure C, en donnant toujours au mot diviser le même sens.

Si donc la coupure C′ a n dimensions, la coupure C en aura $n+1$ et l'espace visuel total $n+2$.

Si toutes les sensations rouges affectant un même point de la rétine étaient regardées comme identiques, la coupure C′ se réduisant à un élément unique aurait 0 dimension, et l'espace visuel en aurait 2.

Et pourtant le plus souvent on dit que l'œil nous donne le sentiment d'une troisième dimension, et nous permet dans une certaine mesure de reconnaître la distance des objets. Quand on cherche à analyser ce sentiment, on constate qu'il se réduit soit à la conscience de la convergence des yeux, soit à celle de l'effort d'accommodation que fait le muscle ciliaire pour mettre l'image au point.

Deux sensations rouges affectant le même point de la rétine ne seront donc regardées comme identiques que si elles sont accompagnées d'une même sensation de convergence et aussi d'une même sensation d'effort d'accommodation ou du moins de sensation de convergence et d'accommodation assez peu différentes pour ne pouvoir être discernées.

A ce compte, la coupure C' est elle-même un continu et la coupure C a plus d'une dimension.

Mais il arrive justement que l'expérience nous apprend que, quand deux sensations visuelles sont accompagnées d'une même sensation de convergence, elles sont également accompagnées d'une même sensation d'accommodation.

Si alors nous formons une nouvelle coupure C'' avec toutes celles des sensations de la coupure C' qui sont accompagnées d'une certaine sensation de convergence, d'après la loi précédente, elles seront toutes indiscernables et pourront être regardées comme identiques; donc C'' ne sera pas un continu et aura 0 dimension; et comme C'' divise C' il en résultera que C' en a une, C deux et que *l'espace visuel total en a trois.*

Mais en serait-il de même si l'expérience nous avait appris le contraire et si une certaine sensation de convergence n'était pas toujours accompagnée d'une même sensation d'accommodation? Dans ce cas deux sensations affectant le même point de la rétine et accompagnées d'un même sentiment de convergence, deux sensations qui par conséquent appartiendraient l'une et l'autre à la coupure C'' pourraient néanmoins être discernées parce qu'elles seraient accompagnées de deux sensations d'accommodation différentes. Donc C'' serait à son tour continu, et aurait une dimension (pour le moins); alors C' en aurait deux, C trois et *l'espace visuel total en aurait quatre.*

Va-t-on dire alors que c'est l'expérience qui nous apprend que l'espace a trois dimensions, puisque c'est en partant d'une loi expérimentale que nous sommes arrivés à lui en attribuer trois? Mais nous n'avons fait là pour ainsi dire qu'une expérience de physiologie; et même comme il suffirait d'adapter sur les yeux des verres de construction convenable pour faire cesser l'accord entre les sentiments de convergence et d'accommodation, allons-nous dire qu'il suffit de mettre des bésicles pour que l'espace ait quatre dimensions et que l'opticien qui les a construites a donné une dimension de plus à l'espace. Évidemment non, tout ce que nous pouvons dire c'est que l'expérience nous a appris qu'il est commode d'attribuer à l'espace trois dimensions.

Mais l'espace visuel n'est qu'une partie de l'espace, et dans la notion même de cet espace il y a quelque chose d'artificiel, comme je l'ai expliqué au début. Le véritable espace est l'espace moteur et c'est celui que nous examinerons dans la suite de ces articles.

(*A suivre.*) H. POINCARÉ.

L'ESPACE ET SES TROIS DIMENSIONS

(*Suite* [1].)

§ 7. — Le groupe des déplacements.

Résumons brièvement les résultats obtenus. Nous nous proposions de rechercher ce qu'on veut dire quand on dit que l'espace a trois dimensions et nous nous sommes demandé d'abord ce que c'est qu'un continu physique et quand on peut dire qu'il a n dimensions. Si nous considérons divers systèmes d'impressions et que nous les comparions entre eux, nous reconnaissons souvent que deux de ces systèmes d'impressions ne peuvent être discernés (ce que l'on exprime d'ordinaire en disant qu'ils sont trop voisins l'un de l'autre, et que nos sens sont trop grossiers pour que nous puissions les distinguer) et nous constatons de plus que deux de ces systèmes peuvent quelquefois être discernés l'un de l'autre, bien qu'étant indiscernables d'un même troisième. S'il en est ainsi on dit que l'ensemble de ces systèmes d'impressions forme un continu physique C. Et chacun de ces systèmes s'appellera un *élément* du continu C.

Combien ce continu a-t-il de dimensions? Prenons d'abord deux éléments A et B de C, et supposons qu'il existe une suite Σ d'éléments, appartenant tous au continu C, de telle façon que A et B soient les deux termes extrêmes de cette suite et que chaque terme de la suite soit indiscernable du précédent. Si l'on peut trouver une pareille suite Σ, nous dirons que A et B sont *reliés* entre eux; et si deux éléments quelconques de C sont reliés entre eux, nous dirons que C est d'un seul tenant.

Choisissons maintenant sur le continu C un certain nombre d'éléments d'une manière tout à fait arbitraire. L'ensemble de ces élé-

1. Voir la *Revue* de mai 1903.

ments s'appellera une *coupure*. Parmi les suites Σ qui relient A à B, nous distinguerons celles dont un élément est indiscernable d'un des éléments de la coupure (nous dirons que ce sont celles qui *coupent* la coupure) et celles dont *tous* les éléments sont discernables de tous ceux de la coupure. Si *toutes* les suites Σ qui relient A à B coupent la coupure, nous dirons que A et B sont *séparés* par la coupure, et que la coupure *divise* C. Si on ne peut pas trouver sur C deux éléments qui soient séparés par la coupure, nous dirons que la coupure *ne divise pas* C.

Ces définitions posées, si le continu C peut être divisé par des coupures qui ne forment pas elles-mêmes un continu, ce continu C n'a qu'une dimension; dans le cas contraire il en a plusieurs. Si pour diviser C, il suffit d'une coupure formant un continu à 1 dimension, C aura 2 dimensions, s'il suffit d'une coupure formant un continu à 2 dimensions, C aura 3 dimensions, etc.

Grâce à ces définitions, on saura toujours reconnaître combien un continu physique quelconque a de dimensions. Il ne reste plus qu'à trouver un continu physique, qui soit pour ainsi dire équivalent à l'espace, de telle façon qu'à tout point de l'espace corresponde un élément de ce continu, et qu'à des points de l'espace très voisins les uns des autres, correspondent des éléments indiscernables. L'espace aura alors autant de dimensions que ce continu.

L'intermédiaire de ce continu physique, susceptible de représentation, est indispensable; parce que nous ne pouvons nous représenter l'espace, et cela pour une foule de raisons. L'espace est un continu mathématique, il est infini, et nous ne pouvons nous représenter que des continus physiques et des objets finis. Les divers éléments de l'espace, que nous appelons points, sont tous semblables entre eux, et, pour appliquer notre définition, il faut que nous sachions discerner les éléments les uns des autres, au moins s'ils ne sont pas trop voisins. Enfin l'espace absolu est un non-sens, et il nous faut commencer par le rapporter à un système d'axes invariablement liés à notre corps (que nous devons toujours supposer ramené à une même attitude).

J'ai cherché ensuite à former avec nos sensations visuelles un continu physique équivalent à l'espace; cela est facile sans doute et cet exemple est particulièrement approprié à la discussion du nombre des dimensions; cette discussion nous a permis de voir dans quelle mesure il est permis de dire que « l'espace visuel » a trois dimensions. Seulement cette solution est incomplète et artificielle, j'ai expliqué pourquoi, et ce n'est pas sur l'espace visuel, mais sur l'espace moteur qu'il faut faire porter notre effort.

J'ai rappelé ensuite quelle est l'origine de la distinction que nous faisons entre les changements de position et les changements d'état.

Parmi les changements qui se produisent dans nos impressions, nous distinguons d'abord les changements *internes* volontaires et accompagnés de sensations musculaires et les changements *externes* dont les caractères sont opposés. Nous constatons qu'il peut arriver qu'un changement externe soit *corrigé* par un changement interne qui rétablit les sensations primitives. Les changements externes susceptibles d'être corrigés par un changement interne s'appellent *changements de position*, ceux qui n'en sont pas susceptibles s'appellent *changements d'état*. Les changements internes susceptibles de corriger un changement externe s'appellent *déplacements du corps en bloc*; les autres s'appellent *changement d'attitude*.

Soient maintenant α et β deux changements externes, α' et β' deux changements internes. Supposons que α puisse être corrigé soit par α', soit par β'; et que α' puisse corriger soit α, soit β; l'expérience nous apprend alors que β' peut également corriger β. Dans ce cas nous dirons que α et β correspondent au *même* déplacement et de même que α' et β' correspondent au *même* déplacement.

Cela posé, nous pouvons imaginer un continu physique que nous appellerons *le continu ou le groupe des déplacements* et que nous définirons de la façon suivante: Les éléments de ce continu seront les changements internes susceptibles de corriger un changement externe. Deux de ces changements internes α' et β' seront regardés comme indiscernables : 1° s'ils le sont naturellement, c'est-à-dire s'ils sont trop voisins l'un de l'autre; 2° si α' est susceptible de corriger le même changement externe qu'un troisième changement interne naturellement indiscernable de β'. Dans ce second cas, ils seront pour ainsi dire indiscernables par convention, je veux dire en convenant de faire abstraction des circonstances qui pourraient les faire distinguer.

Notre continu est maintenant entièrement défini, puisque nous connaissons ses éléments et que nous avons précisé dans quelles conditions ils peuvent être regardés comme indiscernables. Nous avons ainsi tout ce qu'il faut pour appliquer notre définition et déterminer combien ce continu a de dimensions. Nous reconnaîtrons qu'il en a *six*. Le continu des déplacements n'est donc pas équivalent à l'espace, puisque le nombre des dimensions n'est pas le même, il est seulement apparenté à l'espace.

Comment savons-nous maintenant que ce continu des déplacements a six dimensions; nous le savons *par expérience*.

Il serait aisé de décrire les expériences par lesquelles nous pourrions arriver à ce résultat. On verrait qu'on peut dans ce continu pratiquer des coupures qui le divisent et qui sont des continus; qu'on peut diviser ces coupures elles-mêmes par d'autres coupures du second ordre qui sont encore des continus, et qu'on ne serait arrêté qu'après les coupures du sixième ordre qui ne seraient plus des continus. D'après nos définitions cela voudrait dire que le groupe des déplacements a six dimensions,

Cela serait aisé, ai-je dit, mais cela serait assez long; et ne serait-ce pas un peu artificiel? Ce groupe des déplacements, nous l'avons vu, est apparenté à l'espace et on pourrait en déduire l'espace, mais il n'est pas équivalent à l'espace puisqu'il n'a pas le même nombre de dimensions; et quand nous aurons montré comment la notion de ce continu peut se former et comment on peut en déduire celle de l'espace, on pourrait toujours se demander pourquoi l'espace à trois dimensions nous est beaucoup plus familier que ce continu à six dimensions, et douter par conséquent que ce soit par ce détour, que s'est formée dans l'esprit humain la notion d'espace.

§ 8. — Identité de deux points.

Qu'est-ce qu'un point? Comment saurons-nous si deux points de l'espace sont identiques ou différents? Ou en d'autres termes; quand je dis : l'objet A occupait à l'instant α le point qu'occupe l'objet B à l'instant β, qu'est-ce que cela veut dire?

Tel est le problème que nous nous sommes posé au § 4. Comme je l'ai expliqué dans ce § 4, il ne s'agit pas de comparer les positions des objets A et B dans l'espace absolu; la question n'aurait alors manifestement aucun sens; il s'agit de comparer les positions de ces deux objets par rapport à des axes invariablement liés à mon corps, en supposant toujours ce corps ramené à la même attitude.

Je suppose qu'entre les instants α et β, je n'aie bougé ni mon corps, ni mon œil, ce dont je suis averti par mon sens musculaire.

Je n'ai remué non plus ni ma tête, ni mon bras, ni ma main. Je constate qu'à l'instant α des impressions que j'attribuais à l'objet A m'étaient transmises les unes par une des fibres de mon nerf optique, les autres par un des nerfs sensitifs tactiles de mon doigt; je constate qu'à l'instant β, d'autres impressions que j'attribue à l'objet B me sont transmises, les unes par cette même fibre du nerf optique, les autres par ce même nerf tactile.

Il est nécessaire ici de m'arrêter pour une explication; comment suis-je averti que cette impression que j'attribue à A, et celle que j'attribue à B et qui sont qualitativement différentes me sont transmises par le même nerf? Doit-on supposer, pour prendre par exemple les sensations visuelles, que A produit deux sensations simultanées, une sensation purement lumineuse a et une sensation colorée a', que B produit de même simultanément une sensation lumineuse b et une sensation colorée b', que si ces diverses sensations me sont transmises par une même fibre rétinienne, a est identique à b, mais qu'en général les sensations colorées a' et b' produites par des corps différents sont différentes. Dans ce cas ce serait l'identité de la sensation a qui accompagne a' avec la sensation b qui accompagne b', ce serait cette identité, dis-je, qui nous avertirait que toutes ces sensations me sont transmises par la même fibre.

Quoi qu'il en soit de cette hypothèse, et bien que je sois porté à en préférer d'autres notablement plus compliquées, il est certain que nous sommes avertis de quelque façon qu'il y a quelque chose de commun entre ces sensations $a + a'$ et $b + b'$, sans quoi nous n'aurions aucun moyen de reconnaître que l'objet B a pris la place de l'objet A.

Je n'insiste donc pas davantage et je rappelle l'hypothèse que je viens de faire : je suppose que j'ai constaté que les impressions que j'attribue à B me sont transmises à l'instant β par ces mêmes fibres tant optiques que tactiles qui, à l'instant α, m'avaient transmis les impressions que j'attribuais à A. S'il en est ainsi, nous n'hésiterons pas à déclarer que le point occupé par B à l'instant β est identique au point occupé par A à l'instant α.

Je viens d'énoncer deux conditions pour que ces deux points soient identiques; l'une est relative à la vue, l'autre au toucher. Considérons-les séparément. La première est nécessaire, mais n'est pas suffisante. La seconde est à la fois nécessaire et suffisante. Quelqu'un qui saurait la géométrie, l'expliquerait aisément de la manière suivante :

Soit O le point de la rétine où se forme à l'instant α l'image du corps A; soit M le point de l'espace occupé à l'instant α par ce corps A; soit M′ le point de l'espace occupé à l'instant β par le corps B. Pour que ce corps B forme son image en O, il n'est pas nécessaire que les points M et M′ coïncident: comme la vue s'exerce à distance, il suffit que les trois points O M M′ soient en ligne droite. Cette condition que les deux objets forment leur image en O est donc nécessaire, mais non suffisante pour que les points M et M′ coïncident. Soit maintenant P le point occupé par mon doigt et où il reste puisqu'il ne bouge pas. Comme le toucher ne s'exerce pas à distance, si le corps A touche mon doigt à l'instant α, c'est que M et P coïncident; si B touche mon doigt à l'instant β, c'est que M′ et P coïncident. Donc M et M′ coïncident. Donc eette condition que si A touche mon doigt à l'instant α, B le touche à l'instant β, est à la fois nécessaire et suffisante pour que M et M′ coïncident.

Mais nous qui ne savons pas encore la géométrie, nous ne pouvons raisonner comme cela; tout ce que nous pouvons faire, c'est de constater expérimentalement que la première condition relative à la vue peut être remplie sans que le soit la seconde, qui est relative au toucher, mais que la seconde ne peut pas être remplie sans que la première le soit.

Supposons que l'expérience nous ait appris le contraire? Cela se pourrait, et cette hypothèse n'a rien d'absurde. Supposons donc que nous ayons constaté expérimentalement que la condition relative au toucher peut être remplie sans que celle de la vue le soit et que celle de la vue au contraire ne peut pas l'être sans que celle du toucher le soit. Il est clair que, s'il en était ainsi, nous conclurions que c'est le toucher qui peut s'exercer à distance, et que la vue ne s'exerce pas à distance.

Mais ce n'est pas tout; jusqu'ici j'ai supposé que pour déterminer la place d'un objet, je faisais usage seulement de mon œil et d'un seul doigt; mais j'aurais tout aussi bien pu employer d'autres moyens, par exemple tous mes autres doigts.

Je suppose que mon premier doigt reçoive à l'instant α une impression tactile que j'attribue à l'objet A. Je fais une série de mouvements, correspondant à une série S de sensations musculaires. A la suite de ces mouvements, à l'instant α', mon *second* doigt reçoit une impression tactile que j'attribue également à A. Ensuite, à l'instant β, sans que j'aie bougé, ce dont m'avertit mon sens musculaire, ce même second doigt me transmet de nouveau une impression tactile que j'attribue cette fois à l'objet B; je fais ensuite une série de mouvements correspondant à une série S′ de sensations musculaires. Je sais que cette série S′ est inverse de la série S et correspond à des mouvements contraires. Comment le sais-je, c'est parce que des expériences antérieures multiples m'ont souvent montré que si je faisais successivement les deux séries de mouvements correspondant à S et à S′, les impressions primitives se rétablissaient, c'est-à-dire que les deux séries se compensaient mutuellement. Cela posé, dois-je m'attendre à ce qu'à l'instant β', quand la seconde série de mouvements sera terminée, mon *premier doigt* éprouve une impression tactile attribuable à l'objet *B*.

Pour répondre à cette question, ceux qui sauraient déjà la géométrie raisonneraient comme il suit. Il y a des chances pour que l'objet A n'ait pas bougé entre les instants α et α', ni l'objet B entre les instants β et β'; admettons-le. A l'instant α, l'objet A occupait un certain point M de l'espace. Or à cet instant, il touchait mon premier doigt, et *comme le toucher ne s'exerce pas à distance*, mon premier doigt était également au point M. J'ai fait ensuite la série S de mouvements et à la fin de cette série, à l'instant α', j'ai constaté que l'objet A touchait mon second doigt. J'en conclus que ce second doigt se trouvait alors en M, c'est-à-dire que les mouvements S avaient pour effet d'amener le second doigt à la place du premier. A l'instant β, l'objet B est venu au contact de mon second doigt: comme je n'ai pas bougé, ce second doigt est resté en M; donc l'objet B est venu en M; par hypothèse il ne bouge pas jusqu'à l'instant β'. Mais entre les instants β et β', j'ai fait les mouvements S′; comme ces mouvements sont inverses des mouvements S, ils doivent avoir pour effet d'amener le premier doigt à la place du second. A l'instant β', ce premier doigt sera donc en M, et comme l'objet B est également en M cet objet B touchera mon premier doigt. A la question posée, on doit donc répondre oui.

Pour nous, qui ne savons pas encore la géométrie, nous ne pouvons pas raisonner de la sorte, mais nous constatons que cette prévision se réalise d'ordinaire; et nous pouvons toujours expliquer les exceptions en disant que l'objet A a bougé entre les instants α et α', ou l'objet B entre les instants β et β'.

Mais l'expérience n'aurait-elle pu donner un résultat contraire; ce résultat contraire aurait-il été absurde en soi? Évidemment non.

Qu'aurions-nous fait alors si l'expérience avait donné ce résultat contraire? Toute géométrie serait-elle ainsi devenue impossible? pas le moins du monde : nous nous serions bornés à conclure que *le toucher peut s'exercer à distance.*

Quand je dis, le toucher ne s'exerce pas à distance, mais la vue s'exerce à distance, cette assertion n'a qu'un sens qui est le suivant. Pour reconnaître si B occupe à l'instant β, le point occupé par A à l'instant α, je puis me servir d'une foule de critères différents; dans l'un intervient mon œil, dans l'autre mon premier doigt, dans l'autre mon second doigt, etc. Eh bien, il suffit que le critère relatif à l'un de mes doigts soit satisfait pour que tous les autres le soient, mais il ne suffit pas que le critère relatif à l'œil le soit. Voilà le sens de mon assertion, je me borne à affirmer un fait expérimental qui se vérifie d'ordinaire.

Nous avons analysé au § 6 l'espace visuel; nous avons vu que pour engendrer cet espace, il faut faire intervenir les sensations rétiniennes, la sensation de convergence, et la sensation d'accommodation; que si ces deux dernières n'étaient pas toujours d'accord, l'espace visuel aurait quatre dimensions au lieu de trois; et d'autre part que si l'on ne faisait intervenir que les sensations rétiniennes, on obtiendrait « l'espace visuel simple » qui n'aurait que deux dimensions. D'un autre côté, envisageons l'espace tactile, en nous bornant aux sensations d'un seul doigt, c'est-à-dire en somme l'ensemble des positions que peut occuper ce doigt. Cet espace tactile que nous analyserons dans le § suivant et sur lequel je demanderai en conséquence la permission de ne pas m'expliquer davantage pour le moment, cet espace tactile, dis-je, a trois dimensions. Pourquoi l'espace proprement dit a-t-il autant de dimensions que l'espace tactile et en a-t-il plus que l'espace visuel simple? C'est parce que le toucher ne s'exerce pas à distance, tandis que la vue s'exerce à distance. Ces deux assertions n'ont qu'un seul et même sens et nous venons de voir quel était ce sens.

Je reviens maintenant sur un point sur lequel j'avais glissé rapidement pour ne pas interrompre la discussion. Comment savons-nous que les impressions faites sur notre rétine par A à l'instant α et par B à l'instant β nous sont transmises par une même fibre rétinienne, bien que ces impressions soient qualitativement différentes? J'ai émis une hypothèse simple, mais en ajoutant que d'autres hypothèses, notablement plus compliquées, me paraissaient plus probablement exactes. Voici quelles sont ces hypothèses, dont j'ai déjà dit un mot à la page 296. Comment savons-nous que les impressions produites par l'objet rouge A à l'instant α, et par l'objet bleu B à l'instant β, si ces deux objets ont formé leur image au même point de la rétine, comment savons-nous, dis-je, que ces impressions ont quelque chose de commun? On peut rejeter l'hypothèse simple que j'avais faite plus haut et admettre que ces deux impressions, qualitativement différentes, me sont transmises par deux fibres nerveuses différentes quoique contiguës.

Quel moyen ai-je alors de savoir que ces fibres sont contiguës? Il est probable qne nous n'en aurions aucun si l'œil était immobile. Ce sont les mouvements de l'œil qui nous ont appris qu'il y a la même relation entre la sensation de bleu au point A et la sensation de bleu au point B de la rétine qu'entre la sensation du rouge au point A et la sensation de rouge au point B. Ils nous ont montré en effet que les mêmes mouvements, correspondant aux mêmes sensations musculaires, nous font passer de la première à la deuxième, ou de la troisième à la quatrième. Je n'insiste pas sur ces considérations qui se rattachent comme on le voit à la question des signes locaux soulevée par Lotze.

§ 9. — L'espace tactile.

Je sais ainsi reconnaître l'identité de deux points, le point occupé par A à l'instant α et le point occupé par B à l'instant β, mais *à une condition*, c'est que je n'aie pas bougé entre les instants α et β. Cela ne suffit pas pour notre objet. Supposons donc que j'aie remué d'une manière quelconque dans l'intervalle de ces deux instants, comment saurai-je si le point occupé par A à l'instant α est identique au point occupé par B à l'instant β? Je suppose qu'à l'instant α, l'objet A était au contact de mon premier doigt et que de même, à l'instant β, l'objet B touche ce premier doigt; mais en même temps, mon sens musculaire m'a averti que dans l'intervalle mon corps a bougé. J'ai envisagé plus haut deux séries de sensations musculaires S et S' et j'ai dit qu'il arrive quelquefois qu'on est conduit à envisager deux pareilles séries S et S' comme inverses l'une de l'autre parce que nous avons souvent observé que quand ces deux séries se succèdent nos impressions primitives sont rétablies.

Si alors mon sens musculaire m'avertit que j'ai bougé entre les deux instants α et β, mais de façon à ressentir successivement les deux séries de sensations musculaires S et S' que je considère comme inverses; je conclurai encore, tout comme si je n'avais pas bougé, que les points occupés par A à l'instant α et par B à l'instant β sont identiques, si je constate que mon premier doigt touche A à l'instant α et B à l'instant β.

Cette solution n'est pas encore complètement satisfaisante comme on va le voir. Voyons en effet combien de dimensions elle nous ferait attribuer à l'espace. Je veux comparer les deux points occupés par A et B aux instants α et β, ou (ce qui revient au même puisque je suppose que mon doigt touche A à l'instant α et B à l'instant β), je veux comparer les deux points occupés par mon doigt aux deux instants α et β. Le seul moyen dont je dispose pour cette comparaison est la série Σ des sensations musculaires qui ont accompagné les mouvements de mon corps entre ces deux instants. Les diverses séries Σ imaginables forment évidemment un continu physique dont le nombre de dimensions est très grand. Convenons, comme je l'ai fait, de ne pas considérer comme distinctes les deux séries Σ et $\Sigma + S + S'$ lorsque les deux séries S et S' seront inverses l'une de l'autre au sens donné plus haut à ce mot; malgré cette convention, l'ensemble des séries Σ distinctes formera encore un continu physique et le nombre des dimensions sera moindre mais encore très grand.

A chacune de ces séries Σ correspond un point de l'espace; à deux séries Σ et Σ' correspondront ainsi deux points M et M'. Les moyens dont nous disposons jusqu'ici nous permettent de reconnaître que M et M' ne sont pas distincts dans deux cas : 1° si Σ est identique à Σ'; 2° si $\Sigma' = \Sigma + S + S'$, S et S' étant inverses l'une de l'autre. Si dans tous les autres cas, nous regardions M et M' comme distincts, l'ensemble des points aurait autant de dimensions que l'ensemble des séries Σ distinctes, c'est-à-dire beaucoup plus de 3.

Pour ceux qui savent déjà la géométrie, il serait aisé de le leur faire comprendre en raisonnant comme il suit. Parmi les séries de sensations musculaires imaginables, il y en a qui correspondent à des séries de mouvements où le doigt ne bouge pas. Je dis que si l'on ne considère pas comme distinctes les séries Σ et $\Sigma + \sigma$ où la série σ correspond à des mouvements où le doigt ne bouge pas, l'ensemble des séries constituera un continu à trois dimensions, mais que si on regarde deux séries Σ et Σ' comme distinctes à moins que $\Sigma' = \Sigma + S + S'$, S et S' étant inverses, l'ensemble des séries constituera un continu à plus de trois dimensions.

Soit en effet dans l'espace une surface A, sur cette surface une ligne fermée B, sur cette ligne un point M. Soit C_0 l'ensemble de toutes les séries Σ, soit C_1 l'ensemble de toutes les séries Σ telles qu'à la fin des mouvements correspondants le doigt se trouve sur la surface A et de même soient C_2 ou C_3 l'ensemble des séries Σ telles qu'à la fin le doigt se trouve sur B, ou en M. Il est clair d'abord que C_1 constituera une coupure qui divisera C_0, que C_2 sera une coupure qui divisera C, et C_3 une coupure qui divisera C_2. Il résulte de là, d'après nos définitions, que si C_3 est un continu à n dimensions, C_0 sera un continu physique à $n+3$ dimensions.

Soient donc Σ et $\Sigma' = \Sigma + \sigma$ deux séries faisant partie de C_3; pour toutes deux à la fin des mouvements, le doigt se trouve en M; il en résulte qu'au commencement et à la fin de la série σ, le doigt est au même point M. Cette série σ est donc une de celles qui correspondent à des mouvements où le doigt ne bouge pas. Si l'on ne regarde pas Σ et $\Sigma + \sigma$ comme distinctes, toutes les séries de C_3 se confondront en une seule; donc C_3 aura O dimension et C_0, comme je voulais le démontrer en aura 3. Si au contraire je ne regarde pas Σ et $\Sigma + \sigma$ comme confondues, à moins que $\sigma = S + S'$, S et S' étant inverses, il est clair que C_3 contiendra un grand nombre de séries de sensations distinctes; car sans que le doigt bouge, le corps peut prendre une foule d'attitudes différentes. Alors C_3 formera un continu et C_0 aura plus de trois dimensions et c'est encore ce que je voulais démontrer.

Nous qui ne savons pas encore la géométrie, nous ne pouvons pas raisonner de la sorte; nous ne pouvons que constater. Mais alors une question se pose; comment, avant de savoir la géométrie, avons-nous été amenés à distinguer des autres ces séries σ où le doigt ne bouge pas; ce n'est en effet qu'après avoir fait cette distinction que nous pourrons être conduits à regarder Σ et $\Sigma + \sigma$ comme identiques, et c'est à cette condition seulement, comme nous venons de le voir, que nous pouvons arriver à l'espace à trois dimensions.

Nous sommes amenés à distinguer les séries σ, parce qu'il arrive souvent que quand nous avons exécuté les mouvements qui correspondent à ces séries σ de sensations musculaires, les sensations tactiles qui nous sont transmises par le nerf du doigt que nous avons appelé le premier doigt, que ces sensations tactiles, dis-je, persistent et ne sont pas altérées par ces mouvements. Cela, c'est l'expérience qui nous l'apprend et elle seule qui pouvait nous l'apprendre.

Si nous avions distingué les séries de sensations musculaires $S + S'$ formées par la réunion de deux séries inverses; c'est parce qu'elles conservaient l'ensemble de nos impressions, si maintenant nous distinguons les séries σ, c'est parce qu'elles conservent *certaines* de nos impressions. (Quand je dis qu'une série de sensations musculaires S « conserve » une de nos impressions A, je veux dire que nous constatons que si nous éprouvons l'impression A, puis les sensations musculaires S, nous éprouverons *encore* l'impression A *après* ces sensations S.)

J'ai dit plus haut qu'il arrive *souvent* que les séries σ n'altèrent pas les impressions tactiles éprouvées par notre premier doigt; j'ai dit *souvent*, je n'ai pas dit *toujours*; c'est ce que nous exprimons dans notre langage habituel en disant que l'impression tactile ne sera pas altérée si le doigt n'a pas bougé, *à la condition* que l'objet A qui était au contact de ce doigt n'ait pas bougé non plus. Avant de savoir la géométrie, nous ne pouvons pas donner cette explication; tout ce que nous pouvons faire, c'est de constater que l'impression persiste souvent, mais pas toujours.

Mais il suffit qu'elle persiste souvent pour que les séries σ nous apparaissent comme *remarquables*, pour que nous soyons amenés à ranger dans une même classe les séries Σ et $\Sigma + \sigma$, et de là à ne pas les regarder comme distinctes. Dans ces conditions nous avons vu qu'elles engendreront un continu physique à trois dimensions.

Voilà donc un espace à trois dimensions engendré par mon premier doigt. Chacun de mes doigts en engendrera un semblable. Comment sommes-nous conduits à les considérer comme identiques à l'espace visuel, comme identiques à l'espace géométrique, c'est ce qui reste à examiner.

Mais avant d'aller plus loin, faisons une réflexion; d'après ce qui précède, nous ne connaissons les points de l'espace ou plus généralement la situation *finale* de notre corps, que par les séries de sensations musculaires nous révélant les mouvements qui nous ont fait passer d'une certaine situation initiale à cette situation finale. Mais il est clair que cette situation finale dépendra d'une part de ces mouvements et *d'autre part de la situation initiale* d'où nous sommes partis. Or ces mouvements nous sont révélés par nos sensations musculaires; mais rien ne nous fait connaître la situation initiale; rien ne peut nous la faire distinguer de toutes les autres situations possibles. Voilà qui met bien en évidence la relativité essentielle de l'espace.

§ 10. — Identité des divers espaces.

Nous sommes donc amenés à comparer les deux continus C et C′ engendrés par exemple, l'un par mon premier doigt D, l'autre par mon second doigt D′. Ces deux continus physiques ont l'un et l'autre trois dimensions. A chaque élément du continu C, ou si l'on aime mieux s'exprimer ainsi, à chaque point du premier espace tactile, correspond une série de sensations musculaires Σ qui me font passer d'une certaine situation initiale à une certaine situation finale [1]. De plus un même point de ce premier espace correspondra à Σ et à $\Sigma + \sigma$, si σ est une série dont nous savons qu'elle ne fait pas bouger le doigt D.

De même à chaque élément du continu C′, ou à chaque point du second espace tactile correspond une série de sensations Σ', et un même point correspondra à Σ' et $\Sigma' + \sigma'$, si σ' est une série qui ne fait pas bouger le doigt D′.

Ce qui nous fait donc distinguer les séries σ et σ', c'est que les premières n'altèrent pas les impressions tactiles éprouvées par le doigt D et que les secondes conservent celles qu'éprouve le doigt D′.

Or voici ce que nous constatons : au début mon doigt D′ éprouve une sensation A′; je fais des mouvements qui engendrent les sensations musculaires S; mon doigt D éprouve l'impression A; je fais des mouvements qui engendrent une série de sensations σ; mon doigt D continue à éprouver l'impression A, puisque c'est là la propriété caractéristique des séries σ; je fais ensuite des mouvements qui engendrent la série S′ de sensations musculaires, *inverse* de S au sens donné plus haut à ce mot. Je constate alors que mon doigt D

1. Au lieu de dire que nous rapportons l'espace à des axes invariablement liés à notre corps, peut-être vaudrait-il mieux dire, conformément à ce qui précède, que nous le rapportons à des axes invariablement liés à la situation initiale de notre corps.

éprouve de nouveau l'impression A'. (Il faut bien entendu pour cela que S ait été convenablement choisie.)

Ce qui veut dire que la série $S + \sigma + S'$, conservant les impressions tactiles du doigt D' est l'une des séries que j'ai appelées σ'. Inversement si l'on prend une série σ' quelconque, $S' + \sigma' + S$ sera une des séries que nous appelons σ.

Ainsi si S est convenablement choisie, $S + \sigma + S'$ sera une série σ', et en faisant varier σ de toutes les manières possibles, on obtiendra toutes les séries σ' possibles.

Tout cela, ne sachant pas encore la géométrie, nous nous bornons à le constater, mais voici comment ceux qui savent la géométrie expliqueraient le fait. Au début mon doigt D' est au point M, au contact de l'objet a qui lui fait éprouver l'impression A'; je fais les mouvements correspondants à la série S; j'ai dit que cette série devait être convenablement choisie, je dois faire ce choix de telle façon que ces mouvements amènent le doigt D au point primitivement occupé par le doigt D', c'est-à-dire au point M; ce doigt D sera ainsi au contact de l'objet a, qui lui fera éprouver l'impression A.

Je fais ensuite les mouvements correspondants à la série σ; dans ces mouvements, par hypothèse, la position du doigt D ne change pas; ce doigt reste donc au contact de l'objet a et continue à éprouver l'impression A. Je fais enfin les mouvements correspondants à la série S'. Comme S' est inverse de S, ces mouvements amèneront le doigt D' au point occupé d'abord par le doigt D, c'est-à-dire au point M. Si, comme il est permis de le supposer, l'objet a n'a pas bougé, ce doigt D' se trouvera au contact de cet objet et éprouvera de nouveau l'impression A'; ... C. Q. F. D.

Voyons les conséquences. Je considère une série de sensations musculaires Σ; à cette série correspondra un point M du premier espace tactile. Reprenons maintenant les deux séries S et S', inverses l'une de l'autre, dont nous venons de parler. A la série $S + \Sigma + S'$ correspondra un point N du second espace tactile, puisque à une série quelconque de sensations musculaires correspond, comme nous l'avons dit, un point soit dans le premier espace, soit dans le second.

Je vais considérer les deux points N et M ainsi définis comme se correspondant. Qu'est-ce qui m'y autorise? Pour que cette correspondance soit admissible, il faut que s'il y a identité entre deux points M et M' correspondant dans le premier espace à deux séries

Σ et Σ', il y ait aussi identité entre les deux points correspondants du second espace N et N', c'est-à-dire entre les deux points qui correspondent aux deux séries $S + \Sigma + S'$, et $S + \Sigma' + S'$. Or nous allons voir que cette condition est remplie.

Faisons d'abord une remarque. Comme S et S' sont inverses l'une de l'autre, on aura $S + S' = O$, et par conséquent $S + S' + \Sigma = \Sigma + S + S' = \Sigma$, ou encore $\Sigma + S + S' + \Sigma' = \Sigma + \Sigma'$; mais il ne s'ensuit pas que l'on ait $S + \Sigma + S' = \Sigma$; car bien que nous ayons employé le signe de l'addition pour représenter la succession de nos sensations, il est clair que l'ordre de cette succession n'est pas indifférent ; nous ne pouvons donc, comme dans l'addition ordinaire, intervertir l'ordre des termes ; pour employer un langage abrégé, nos opérations sont associatives, mais non commutatives.

Cela posé, pour que Σ et Σ' correspondent à un même point $M = M'$ du premier espace, il faut et il suffit que l'on ait $\Sigma' = \Sigma + \sigma$. On aura alors :

$$S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + \sigma + S' = S + \Sigma + S' + S + \sigma + S'.$$

Mais nous venons de constater que $S + \sigma + S'$ était une des séries σ'. On aura donc :

$$S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + S' + \sigma'$$

ce qui veut dire que les séries $S + \Sigma' + S'$ et $S + \Sigma + S'$ correspondent à un même point $N = N'$ du second espace. C. Q. F. D.

Nos deux espaces se correspondent donc point à point ; ils peuvent être « transformés » l'un dans l'autre ; ils sont isomorphes ; comment sommes-nous conduits à en conclure qu'ils sont identiques ?

Considérons les deux séries σ et $S + \sigma + S' = \sigma'$. J'ai dit que souvent, mais non toujours, la série σ conserve l'impression tactile A éprouvée par le doigt D ; et de même il arrive souvent, mais non toujours que la série σ' conserve l'impression tactile A' éprouvée par le doigt D'. Or je constate qu'il arrive *très souvent* (c'est-à-dire beaucoup plus souvent que ce que je viens d'appeler « souvent ») que quand la série σ a conservé l'impression A du doigt D, la série σ' conserve en même temps l'impression A' du doigt D' ; et inversement que si la première impression est altérée ; la seconde l'est également. Cela arrive *très souvent*, mais pas toujours.

Nous interprétons ce fait expérimental en disant que l'objet inconnu *a* qui cause l'impression A au doigt D est identique à l'objet inconnu a' qui cause l'impression A' au doigt D'. Et en effet quand le premier objet bouge, ce dont nous avertit la disparition de l'impression A, le second bouge également, puisque l'impression A' disdisparaît également. Quand le premier objet reste immobile, le second reste immobile. Si ces deux objets sont identiques, comme le premier est au point M du premier espace et le second au point N du second espace, c'est que ces deux points sont identiques. Voilà comment nous sommes conduits à regarder ces deux espaces comme identiques; ou mieux voilà ce que nous voulons dire quand nous disons qu'ils sont identiques.

Ce que nous venons de dire de l'identité des deux espaces tactiles nous dispense de discuter la question de l'identité de l'espace tactile et de l'espace visuel qui se traiterait de la même manière.

§ 11. — L'espace et l'empirisme.

Il semble que je vais être amené à des conclusions conformes aux idées empiristes. J'ai cherché en effet à mettre en évidence le rôle de l'expérience et à analyser les faits expérimentaux qui interviennent dans la genèse de l'espace à trois dimensions. Mais quelle que puisse être l'importance de ces faits, il y a une chose que nous ne devons pas oublier et sur laquelle j'ai d'ailleurs appelé plus d'une fois l'attention. Ces faits expérimentaux se vérifient souvent, mais pas toujours. Cela ne veut évidemment pas dire que l'espace a souvent trois dimensions, mais pas toujours.

Je sais bien qu'il est aisé de s'en tirer et que, si les faits ne se vérifient pas, on l'expliquera aisément en disant que les objets extérieurs ont bougé. Si l'expérience réussit, on dit qu'elle nous renseigne sur l'espace; si elle ne réussit pas, on s'en prend aux objets extérieurs qu'on accuse d'avoir bougé; en d'autres termes, si elle ne réussit pas on lui donne un coup de pouce.

Ces coups de pouce sont légitimes, je n'en disconviens pas; mais ils suffisent pour nous avertir que les propriétés de l'espace ne sont pas des vérités expérimentales proprement dites. Si nous avions voulu vérifier d'autres lois, nous aurions pu aussi y parvenir, en donnant d'autres coups de pouce analogues? N'aurions-nous pas toujours pu justifier ces coups de pouce par les mêmes raisons? Tout au plus aurait-on pu nous dire : « vos coups de pouce sont légitimes sans doute, mais vous en abusez; à quoi bon faire bouger aussi souvent les objets extérieurs? »

En résumé l'expérience ne nous prouve pas que l'espace a trois dimensions; elle nous prouve qu'il est commode de lui en attribuer trois, parce que c'est ainsi que le nombre des coups de pouce est réduit au minimum.

Ajouterai-je que l'expérience ne nous ferait jamais toucher que l'espace représentatif qui est un continu physique, et non l'espace géométrique qui est un continu mathématique. Tout au plus pourrait-il nous apprendre qu'il est commode de donner à l'espace géométrique trois dimensions pour qu'il en ait autant que l'espace représentatif.

La question empirique peut se poser sous une autre forme. Est-il impossible de concevoir les phénomènes physiques, les phénomènes mécaniques par exemple autrement que dans l'espace à trois dimensions. Nous aurions ainsi une preuve expérimentale objective pour ainsi dire, indépendante de notre physiologie, de nos modes de représentation.

Mais il n'en est pas ainsi; je ne discuterai pas ici complètement la question, je me bornerai à rappeler l'exemple frappant que nous donne la mécanique de Hertz.

On sait que le grand physicien ne croyait pas à l'existence des forces proprement dites; il supposait que les points matériels visibles sont assujettis à certaines liaisons invisibles qui les relient à d'autres points invisibles et que c'est l'effet de ces liaisons invisibles que nous attribuons aux forces.

Mais ce n'est là qu'une partie de ses idées. Supposons un système formé de n points matériels visibles ou non; cela fera en tout $3n$ coordonnées; regardons-les comme les coordonnées d'un point *unique* dans l'espace à $3n$ dimensions. Ce point unique serait assujetti à rester sur une surface (d'un nombre quelconque de dimensions $< 3n$) en vertu des liaisons dont nous venons de parler; pour se rendre sur cette surface d'un point à un autre, il prendrait toujours le chemin le plus court et ce serait là le principe unique qui résumerait toute la mécanique.

Quoi que l'on doive penser de cette hypothèse, qu'on soit séduit par sa simplicité, ou rebuté par son caractère artificiel, le seul fait que Hertz ait pu la concevoir, et la regarder comme plus commode que nos hypothèses habituelles, suffit pour prouver que nos idées ordinaires, et en particulier les trois dimensions de l'espace, ne s'imposent nullement au mécanicien avec une force invincible.

§ 12. — L'esprit et l'espace.

L'expérience n'a donc joué qu'un seul rôle, elle a servi d'occasion. Mais ce rôle n'en était pas moins très importent; et j'ai cru nécessaire de le faire ressortir. Ce rôle aurait été inutile s'il existait une forme *a priori* s'imposant à notre sensibilité et qui serait l'espace à trois dimensions.

Cette forme existe-t-elle, ou si l'on veut, pouvons-nous nous représenter l'espace à plus de trois dimensions? Et d'abord que signifie cette question? Au vrai sens du mot, il est clair que nous ne pouvons nous représenter ni l'espace à quatre, ni l'espace à trois dimensions; nous ne pouvons d'abord nous les représenter vides, et nous ne pouvons non plus nous représenter les objets ni dans l'espace à quatre, ni dans l'espace à trois dimensions; 1° parce que ces espaces sont l'un et l'autre infinis et que nous ne pourrions nous représenter une figure *dans* l'espace, c'est-à-dire la partie *dans* le tout sans nous représenter le tout et cela est impossible puisque ce tout est infini; 2° parce que ces espaces sont l'un et l'autre des continus mathématiques et que nous ne pouvons nous représenter que le continu physique; 3° parce que ces espaces sont l'un et l'autre homogènes, et que les cadres où nous enfermons nos sensations, étant limités, ne peuvent être homogènes.

Ainsi la question posée ne peut s'entendre que d'une manière; est-il possible d'imaginer que, les résultats des expériences relatées plus haut ayant été différents, nous ayons été conduits à attribuer à l'espace plus de trois dimensions; d'imaginer par exemple que la sensation d'accommodation ne soit pas constamment d'accord avec la sensation de convergence des yeux; ou bien que les expériences dont nous avons parlé au § 8 et dont nous exprimons le résultat en disant « que le toucher ne s'exerce pas à distance » nous aient conduits à une conclusion inverse.

Et alors évidemment oui cela est possible; du moment qu'on imagine une expérience, on imagine par cela même les deux résultats contraires qu'elle peut donner. Cela est possible, mais cela est difficile parce que nous avons à vaincre une foule d'associations d'idées, qui sont le fruit d'une longue expérience personnelle et de l'expérience plus longue encore de la race. Sont-ce ces associations (ou du moins celles d'entre elles que nous avons héritées de nos ancêtres), qui constituent cette forme *a priori* dont on nous dit que nous avons l'intuition pure? Alors je ne vois pas pourquoi on la déclarerait rebelle à l'analyse et on me dénierait le droit d'en rechercher l'origine.

Quand on dit que nos sensations sont « étendues », on ne peut vouloir dire qu'une chose, c'est qu'elles se trouvent toujours associées à l'idée de certaines sensations musculaires, correspondant aux mouvements qui permettraient d'atteindre l'objet qui les cause, qui permettraient en d'autres termes de se défendre contre elles. Et c'est justement parce que cette association est utile à la défense de l'organisme, qu'elle est si ancienne dans l'histoire de l'espèce et qu'elle nous semble indestructible. Néanmoins ce n'est qu'une association et on peut concevoir qu'elle soit rompue; de sorte qu'on ne peut pas dire que la sensation ne peut entrer dans la conscience sans entrer dans l'espace, mais qu'en fait elle n'entre pas dans la conscience sans entrer dans l'espace, ce qui veut dire, sans être engagée dans cette association.

Je ne puis comprendre non plus qu'on dise que l'idée de temps est postérieure logiquement à l'espace, parce que nous ne pouvons nous le représenter que sous la forme d'une droite; autant dire que le temps est postérieur logiquement à la culture des prairies parce qu'on se le représente généralement armé d'une faux. Qu'on ne puisse pas se représenter simultanément les diverses parties du temps, cela va de soi, puisque le caractère essentiel de ces parties est précisément de n'être pas simultanées. Cela ne veut pas dire que l'on n'ait pas l'intuition du temps. A ce compte on n'aurait pas non plus celle de l'espace, car, lui aussi, on ne peut pas se le représenter, au sens propre du mot, pour les raisons que j'ai dites. Ce que nous nous représentons sous le nom de droite est une image grossière qui ressemble aussi mal à la droite géométrique qu'au temps lui-même.

Pourquoi a-t-on dit que toute tentative pour donner une quatrième dimension à l'espace ramène toujours celle-ci à l'une des trois autres? Il est aisé de le comprendre. Envisageons nos sensations musculaires et les « séries » qu'elles peuvent former. A la suite d'expériences nombreuses, les idées de ces séries sont associées entre elles dans une trame très complexe, nos séries sont *classées*. Qu'on me permette, pour la commodité du langage, d'exprimer ma pensée d'une façon tout à fait grossière et même inexacte en disant que nos séries de sensations musculaires sont classées en trois classes correspondant aux trois dimensions de l'espace. Bien entendu, cette classification est beaucoup plus compliquée que cela, mais cela suffira pour faire comprendre mon raisonnement. Si je veux imaginer une quatrième dimension, je supposerai une autre série de sensations musculaires, faisant partie d'une quatrième classe. Mais comme *toutes* mes sensations musculaires ont déjà été rangées dans une des trois classes préexistantes, je ne puis me représenter qu'une série appartenant à l'une de ces trois classes, de sorte que ma quatrième dimension est ramenée à l'une des trois autres.

Qu'est-ce que cela prouve? C'est qu'il aurait fallu d'abord détruire l'ancienne classification et la remplacer par une nouvelle où les séries de sensations musculaires auraient été réparties en quatre classes. La difficulté aurait disparu.

On la présente quelquefois sous une forme plus frappante. Supposons que je sois enfermé dans une chambre entre les six parois infranchissables formées par les quatre murs, le plafond et le plancher; il me sera également impossible d'en sortir et d'imaginer que j'en sorte. — Pardon, ne pouvez-vous vous imaginer que la porte s'ouvre, ou que deux de ces parois s'écartent? — Mais bien entendu, répondra-t-on, il faut qu'on suppose que ces parois demeurent immobiles. — Oui, mais il est évident que moi, j'ai le droit de bouger; et alors les parois que nous supposons en repos absolu seront en mouvement relatif par rapport à moi. — Oui, mais un pareil mouvement relatif ne peut pas être quelconque, quand des objets sont en repos, leur mouvement relatif par rapport à des axes quelconques est celui d'un corps solide invariable, or les mouvements apparents que vous imaginez ne sont pas conformes aux lois du mouvement d'un solide invariable. — Oui, mais c'est l'expérience qui nous a appris les lois du mouvement d'un solide invariable; rien n'empêcherait *d'imaginer* qu'elles fussent différentes. En résumé pour m'imaginer que je sors de ma prison, je n'ai qu'à m'imaginer que les parois semblent s'en écarter, quand je remue.

Je crois donc que si par espace on entend un continu mathématique à trois dimensions, fût-il d'ailleurs amorphe, c'est l'esprit qui le construit, mais il ne le construit pas avec rien, il lui faut des matériaux et des modèles. Ces matériaux comme ces modèles préexistent en lui. Mais il n'y a pas un modèle unique qui s'impose à lui; il a *du choix*; il peut choisir par exemple entre l'espace à quatre et l'espace à trois dimensions. Quel est alors le rôle de l'expérience? C'est elle qui lui donne les indications d'après lesquelles il fait son choix.

Autre chose; d'où vient à l'espace son caractère quantitatif? Il vient du rôle que jouent dans sa genèse les séries de sensations musculaires? Ce sont des séries qui peuvent *se répéter*, et c'est de leur répétition que vient le nombre; c'est parce qu'elles peuvent se répéter indéfiniment que l'espace est infini. Et enfin nous avons vu à la fin du § 9 que c'est aussi pour cela que l'espace est relatif. Ainsi c'est la répétition qui a donné à l'espace ses caractères essentiels; or la répétition suppose le temps; c'est assez dire que le temps est antérieur logiquement à l'espace.

§ 13. — Role des canaux semi-circulaires.

Je n'ai pas parlé jusqu'ici du rôle de certains organes auxquelles les physiologistes attribuent avec raison une importance capitale, je veux parler des canaux semi-circulaires. De nombreuses expériences ont suffisamment montré que ces canaux sont nécessaires à notre sens d'orientation; mais les physiologistes ne sont pas entièrement d'accord; deux théories opposées ont été proposées, celle de Mach-Delage, et celle de M. de Cyon.

M. de Cyon est un physiologiste qui a illustré son nom par d'importantes découvertes sur l'innervation du cœur; je ne saurais toutefois partager ses idées sur la question qui nous occupe. N'étant pas physiologiste, j'hésite à critiquer les expériences qu'il a dirigées contre la théorie adverse de Mach-Delage; il me semble cependant qu'elles ne sont pas probantes, car dans beaucoup d'entre elles on faisait varier la pression dans un des canaux *tout entier*, tandis que, physiologiquement, ce qui varie, c'est la *différence* entre les pressions sur les deux extrémités du canal; dans d'autres, les organes étaient profondément lésés, ce qui devait en altérer les fonctions.

Peu importe d'ailleurs; les expériences, si elles étaient irréprochables, pourraient être probantes contre la théorie ancienne, mais non *pour* la théorie nouvelle. Si en effet j'ai bien compris la théorie, il me suffira de l'exposer pour qu'on comprenne qu'il est impossible de concevoir une expérience qui la confirme.

Les trois paires de canaux auraient pour unique fonction de nous avertir que l'espace a trois dimensions. Les souris japonaises n'ont que deux paires de canaux; elles croient, paraît-il, que l'espace n'a que deux dimensions et elles manifestent cette opinion de la façon la plus étrange; elles se rangent en cercle, chacune d'elles mettant le nez sous la queue de la précédente, et ainsi rangées, elles se mettent à tourner rapidement. Les lamproies, n'ayant qu'une paire de canaux, croient que l'espace n'a qu'une dimension, mais leurs manifestations sont moins tumultueuses.

Il est évident qu'une semblable théorie n'est pas admissible. Les organes des sens sont destinés à nous avertir des *changements* qui se produisent dans le monde extérieur. On ne comprendrait pas pourquoi le créateur nous aurait donné des organes destinés à nous crier sans cesse : Souviens-toi que l'espace a trois dimensions, puisque le nombre de ces dimensions n'est pas sujet au changement.

Nous devons donc en revenir à la théorie de Mach-Delage. Ce que peuvent nous faire connaître les nerfs des canaux, c'est la différence de pression sur les deux extrémités d'un même canal et par là :

1° La direction de la verticale par rapport à 3 axes invariablement liés à la tête.

2° Les trois composantes de l'accélération de translation du centre de gravité de la tête.

3° Les forces centrifuges développées par la rotation de la tête.

4° L'accélération du mouvement de rotation de la tête.

Il résulte des expériences de M. Delage que c'est cette dernière indication qui est de beaucoup la plus importante; sans doute parce que les nerfs sont moins sensibles à la différence de pression elle-même qu'aux variations brusques de cette différence. Les trois premières indications peuvent ainsi être négligées.

Connaissant l'accélération du mouvement de rotation de la tête à chaque instant, nous en déduisons, par une intégration inconsciente, l'orientation finale de la tête, rapportée à une certaine orientation initiale prise pour origine. Les canaux circulaires contribuent donc à nous renseigner sur les mouvements que nous avons exécutés, et cela au même titre que les sensations musculaires. Quand donc, plus haut, nous parlions de la série S ou de la série Σ, nous aurions dû dire, non que c'étaient des séries de sensations musculaires seulement, mais que c'étaient des séries à la fois de sensations musculaires et de sensations dues aux canaux semi-circulaires. A part cette addition, nous n'aurions rien à changer à ce qui précède.

Dans ces séries S et Σ, ces sensations des canaux semi-circulaires tiennent évidemment une place tout à fait importante. A elles seules elles ne suffiraient pas cependant; car elles ne peuvent nous renseigner que sur les mouvements de la tête, elles ne nous apprennent rien sur les mouvements relatifs du tronc ou des membres par rapport à la tête. De plus il semble qu'elles nous renseignent seulement sur les rotations de la tête et non sur les translations qu'elle peut subir.

H. Poincaré.