THE COLLECTED

MATHEMATICAL WORKS

OF

GEORGE WILLIAM HILL

VOLUME ONE

PUBLISHED BY THE CARNEGIE INSTITUTION OF WASHINGTON
JUNE, 1905

INTRODUCTION

PAR M. H. POINCARÉ

M. Hill est une des physionomies les plus originales du monde scientifique américain. Tout entier à ses travaux et à ses calculs, il reste étranger à la vie fiévreuse qui s'agite autour de lui, il recherche l'isolement, hier dans son bureau du Nautical Almanac, aujourd'hui dans sa ferme tranquille de la vallée de l'Hudson. Cette réserve, j'allais dire cette sauvagerie, a été une circonstance heureuse pour la science, puisqu'elle lui a permis de mener jusqu'au bout ses ingénieuses et patientes recherches, sans en être distrait par les incessants accidents du monde extérieur. Mais elle a empêché que sa réputation se répandit rapidement au dehors; des années se sont écoulées avant qu'il eût, dans l'opinion du public savant, la place à laquelle il avait droit. Sa modestie ne s'en chagrinait pas trop et il ne demandait qu'une chose, le moyen de travailler en paix.

M. Hill est né à New York le 3 mars 1838. Son père, d'origine anglaise, était venu en Amérique en 1820 à l'âge de 8 ans; sa mère, d'une vieille famille huguenote, lui apportait les traditions des premiers colons de la terre américaine.

Quoique né dans une grande ville, M. Hill est un campagnard; peu de temps après sa naissance, son père quitta New York et vint s'établir à West Nyack, N. Y.; c'était une ferme, près de la rivière Hudson, à 25 milles environ de la grande Cité. C'est là que M. Hill passa son enfance; il aima toujours cette résidence; il y revenait toutes les fois qu'il le pouvait, et quand il eut quitté le Nautical Almanac, c'est encore là qu'il s'établit définitivement; c'est là qu'il poursuit tranquillement ses travaux, évitant le plus qu'il peut les voyages à New York.

Ses aptitudes exceptionnelles pour les mathématiques ne tardèrent pas à se manifester et on décida de l'envoyer au collége. En octobre 1855, à l'âge de 17 ans, il entra au Collége Rutgers, New Brunswick, N. J. Son professeur de mathématiques était le Dr. Strong, ami de M. Bowditch, le traducteur de la Mécanique Céleste de Laplace.

Le Dr. Strong était un homme de tradition, un laudator temporis acti; pour lui Euler était le Dieu des Mathématiques, et après lui la décadence avait commencé; il est vrai que c'est là un dieu que l'on peut adorer avec profit. De rares exceptions près, la bibliothèque du Dr. Strong était impitoyablement fermée à tous les livres postérieurs à 1840. Heureusement on a écrit d'excellentes choses sur la Mécanique Céleste avant 1840; on trouvait là Laplace, Lagrange, Poisson, Pontécoulant. Tels furent les maîtres par lesquels Hill fut initié au rudiment.

En juillet 1859 il reçut ses degrés au Collége Rutgers et se rendit à Cambridge, Mass., dans l'espoir d'accroître ses connaissances mathématiques, mais il n'y resta pas longtemps, car au printemps de 1861 il obtint un poste d'assistant aux bureaux du Nautical Almanac à Washington. Il resta au service de cette éphéméride pendant trente années de sa vie, les plus fructueuses au point de vue de la production scientifique.

Les bureaux du Nautical Almanac étaient à cette époque à Cambridge (Massachusetts), où ils pouvaient profiter des ressources scientifiques de l'Université Harvard et ils étaient dirigés par M. Runkle. Ce savant avait fondé un journal de mathématiques élémentaires, The Mathematical Monthly, dans le but de favoriser les études mathématiques en Amérique en facilitant la publication de courts articles et en proposant des prix pour la solution de problèmes mathématiques. L'un des premiers articles publiés révélait la main d'un maître, et gagna aisément le prix. Il s'agissait des fonctions de Laplace et de la figure de la Terre. L'auteur était M. Hill, qui venait de sortir du collége.

C'est ainsi que l'attention de M. Runkle fut attirée sur ce jeune homme et qu'il songea à utiliser ses services pour les calculs de l'éphéméride américaine.

On l'autorisa néanmoins à continuer sa résidence dans sa maison familiale de West Nyack (village qui s'appelait alors Nyack Turnpike). Il y resta encore quand en 1886 les bureaux du Nautical Almanac furent transférés à Washington.

Mais en 1877 M. Simon Newcomb prit la direction de l'éphéméride. Il voulut entreprendre une tâche colossale, la reconstruction des tables de toutes les planètes; la part de M. Hill était la plus difficile; c'était la théorie de Jupiter et de Saturne, dont il avait commencé à s'occuper depuis 1872. Il ne pouvait la mener à bien qu'auprès de son chef et de ses collègues. Il fallut donc se résigner à l'exil; l'importance de l'œuvre à accomplir lui fit facilement accepter ce sacrifice.

Ses services furent hautement appréciés; en 1874 il fut élu membre de l'Académie Nationale des Sciences. En 1887 la Société Royale Astronomique de Londres lui accorda sa médaille d'or pour ses recherches sur la théorie de la Lune. Il fut président de la Société Mathématique Américaine pendant les années 1894 et 1895. L'université de Cambridge (Angleterre) lui conféra des degrés honoraires, et il en fut de même de plusieurs universités américaines.

En 1892 il prit sa retraite et quitta les bureaux du Nautical Almanac; il eut hâte de s'installer pour ses dernières années dans cette chère maison où il avait passé son enfance; au début, il la quittait encore plusieurs fois par semaine pour venir professer à l'Université Columbia à New York; mais il ne tarda pas à se lasser de cet enseignement et depuis il y vit seul avec ses livres et ses souvenirs.

Le travail quotidien du Nautical Almanac, qui est fort absorbant, lui laissait cependant assez de temps pour ses recherches originales, dont quelques-unes portent sur des objets étrangers à ses études habituelles. Dans les premières années surtout, on trouve fréquemment son nom dans ces recueils périodiques, où les amateurs de mathématiques pures se proposent de petits problèmes et se complaisent dans l'élégance des solutions, par exemple, dans "The Analyst."

Mais il ne tarda pas à se spécialiser. Non seulement ses fonctions l'y contraignaient, mais ses goûts l'y portaient. Le travail courant, nécessaire pour la préparation de l'éphéméride, lui fournissait déjà des occasions de se distinguer. Nous citerons des tables pour faciliter le calcul des positions des étoiles fixes et qui sont précédées d'une note de M. Hill où la théorie de cette réduction est exposée d'une façon simple et claire.

A cette époque le prochain passage de Vénus préoccupait tous les astronomes. En vue des expéditions projetées, le bureau de l'éphéméride dut se livrer à de longs travaux préliminaires. M. Hill fut ainsi conduit à refaire les tables de Vénus. C'était son premier ouvrage de longue haleine, et on peut y voir déjà le germe des qualités que l'on admirera plus tard dans tous ses écrits. Dans cette première période de sa vie scientifique, il revint à plusieurs reprises sur le calcul des orbites. C'est là un problème qui se présente constamment au calculateur astronomique et qui devait naturellement retenir l'attention d'un praticien constamment aux prises avec les difficultés qu'il fait naître. Citons une élégante discussion de l'équation fondamentale de Gauss et diverses notes relatives au même sujet. Les progrès de l'astronomie d'observation avaient d'ailleurs fait entrer la question dans une phase nouvelle; les découvertes de petites planètes se multiplient et deviennent de plus en plus fréquentes. Elles se succèdent avec une telle rapidité que les calculateurs sont distancés par les observateurs. Ceux-ci fournissent aux premiers plus de besogne qu'ils n'en peuvent faire, et ils veulent être servis promptement, parce que dès qu'une nouvelle planète est découverte ils craignent de la perdre. La question aujourd'hui est donc avant tout de faire vite; il faut des méthodes rapides, qui n'exigent pas de trop longs calculs et permettent d'utiliser les premières observations. On a été ainsi conduit à négliger d'abord l'excentricité des ellipses et à calculer des orbites circulaires. Tel est le point de vue où s'est placé M. Hill dans une série de notes qui ont paru dans divers recueils entre 1870 et 1874.

Mais j'ai hâte d'arriver à son œuvre capitale, à celle où s'est dévoilée toute l'originalité de son esprit, à sa théorie de la Lune. Pour en bien faire comprendre la portée, il faut d'abord rappeler quel était l'état de cette théorie au moment où M. Hill commença à s'en occuper.

Deux œuvres de haute sagacité et de longue patience venaient d'être menées à bonne fin ; je veux parler de celle de Hansen et de celle de Delaunay. Le premier, par une voie inutilement détournée, était arrivé le premier au but, devançant de beaucoup ceux qui avaient pris la bonne route. Ce phénomène, au premier abord inexplicable, n'étonnera pas beaucoup les psychologues. Si sa méthode, qui nous paraît si rébarbative, ne l'effrayait pas, c'est précisément parce qu'il était infiniment patient, et c'est pour cela aussi qu'il est allé jusqu'au bout. Et c'est aussi parce qu'elle était étrange qu'elle lui semblait avoir un cachet d'originalité, et c'est dans le sentiment de cette originalité qu'il a puisé la foi solide qui l'a soutenu dans son entreprise. Une autre raison de son succès, c'est qu'il n'a cherché que des valeurs purement numériques des coëfficients sans se préoccuper d'en trouver l'expression analytique ; ce qui chez les autres représentaient de longues formules, se réduisait pour lui à un chiffre, et cela dès le début du calcul.

Quoi qu'il en soit, c'est encore sur les tables de Hansen que nous vivons et il est probable que les nouvelles théories plus savantes, plus satisfaisantes pour l'esprit, ne donneront pas des chiffres très différents.

Delaunay est à l'extrême opposé ; ses inégalités se présentent sous la forme de formules algébriques ; dans ces formules ne figurent que des lettres et des coëfficients numériques formés par le quotient de deux nombres entiers exactement calculés. Il n'a donc pas fait seulement la théorie de la Lune, mais la théorie de tout satellite qui tournerait ou pourrait tourner autour de n'importe quelle planète. A ce point de vue il laisse Hansen loin derrière lui. La méthode qui l'avait conduit à ce résultat constituait le progrès le plus important qu'eût fait la Mécanique Céleste depuis Laplace. Perfectionnée aujourd'hui et allégée, elle est devenue un instrument que chacun peut manier et qui a rendu déjà bien des services dans toutes les parties de l'Astronomie. Telle que Delaunay l'avait d'abord conçue, elle était d'un emploi plus pénible. Peut-être aurait-il abrégé considérablement son travail s'il en avait fait un usage moins exclusif, mais il faut beaucoup pardonner aux inventeurs.

Il mena à bonne fin sa tâche d'algébriste, mais les formules demandaient à être réduites en chiffres; quand un accident imprévu l'enleva à ses admirateurs, il était sur le point de commencer ces nouveaux calculs. Sa mort arrêta ce travail, et ce n'est que dans ces derniers temps qu'il put être repris et terminé.

Malheureusement les séries de Delaunay ne convergent qu'avec une désespérante lenteur. Elles procèdent suivant les puissances des excentricités de l'inclinaison, de la parallaxe du soleil, et de la quantité que l'on appelle *m* et qui est le rapport des moyens mouvements. Cette quantité est de $\frac{1}{13}$ environ, et si les coëfficients numériques allaient en décroissant, la convergence serait suffisante. Malheureusement il n'en est pas ainsi, ces coëfficients croissent, au contraire, très rapidement par suite de la présence de petits diviseurs. Aussi désespérant de pousser assez loin le calcul des séries, Delaunay fut-il obligé d'ajouter *au jugé* des termes complémentaires.

M. Hill s'assimila promptement la méthode de Delaunay, et en a fait l'objet de plusieurs de ses écrits, mais celle qu'il proposa était tout à fait différente et très originale. C'est dans un mémoire de l'American Journal of Mathematics, tome 1, que nous en voyons les premiers germes.

Les séries de Delaunay, nous l'avons dit, dépendent de cinq constantes, qui sont les excentricités, l'inclinaison, la parallaxe du soleil et enfin la quantité *m*. Si nous supposons que les quatre premières sont nulles, nous aurons une solution particulière de nos équations différentielles. Cette solution particulière sera beaucoup plus simple que la solution générale, puisque la plupart des inégalités auront disparu, et qu'une seule d'entre elles subsistera, celle qui est connue sous le nom de variation. D'autre part cette solution particulière ne représente pas exactement la trajectoire de la Lune, mais elle peut servir de première approximation, puisque les excentricités, l'inclinaison et la parallaxe sont effectivement très petites. Le choix de cette première approximation est beaucoup plus avantageux que celui de l'ellipse Keplerienne, puisque pour cette ellipse le périgée est fixe, tandis que pour l'orbite réelle il est mobile.

Les équations différentielles sont d'ailleurs elles-mêmes plus simples, puisque l'excentricité et la parallaxe étant nulles, le Soleil est supposé décrire une circonférence de rayon très grand. M. Hill simplifie encore ces équations par un choix judicieux des variables. Il prend non pas les coordonnées polaires, mais les coordonnées rectangulaires, et c'est là un grand progrès. Que ces dernières soient plus simples à tout égard, c'est de toute évidence, et cependant les astronomes répugnent à les adopter. Je comprends à la rigueur cette répugnance pour la Lune, puisque ce que nous observons, ce que nous avons besoin de calculer c'est la longitude, mais j'avoue que je me l'explique difficilement en ce qui concerne les planètes, puisque ce n'est pas la longitude héliocentrique, mais la longitude géocentrique qu'on observe. En tous cas, pour la Lune, elle-même, M. Hill a jugé que les avantages l'emportent sur les inconvénients, et qu'on peut bien se résigner à faire à la fin du calcul un petit changement de coordonnées, pour ne pas traîner pendant toute une théorie, un encombrant bagage de variables incommodes.

Les variables de M. Hill ne sont pas d'ailleurs des coordonnées rectangulaires par rapport à des axes fixes, mais par rapport à des axes mobiles animés d'une rotation uniforme, égale à la vitesse angulaire moyenne du Soleil. D'où une simplification nouvelle, car le temps ne figure plus explicitement dans les équations. Mais l'avantage le plus important est le suivant.

Pour un observateur lié à ces axes mobiles, la Lune paraîtrait décrire une courbe fermée, si les excentricités, l'inclinaison et la parallaxe étaient nulles. Comme les équations différentielles sont d'ailleurs rigoureuses, *c'était là le premier exemple d'une solution périodique du problème des* 3 *corps*, dont l'existence était rigoureusement démontrée. Depuis ces solutions périodiques ont pris une importance tout à fait capitale en Mécanique Céleste. Mais l'auteur ne se borna pas à démontrer cette existence, il étudia dans le détail cette orbite (ou plutôt *ces* orbites périodiques, car il fit varier le seul paramètre qui figurât dans ces équations, le paramètre m); il détermina point par point ces trajectoires fermées et calcula les coordonnées de ces points avec de nombreuses décimales. Les développements de Delaunay furent remplacés par d'autres plus convergents et pour de grandes valeurs de m, quand les séries nouvelles elles-même ne suffirent plus, M. Hill eut recours aux quadratures mécaniques. Il arrive finalement au cas, où, pour l'observateur mobile dont nous parlions, l'orbite apparente aurait un point de rebroussement.

Une dernière remarque; M. Hill, dans le mémoire que nous analysons, transforme ses équations de façon à les rendre homogènes et il tire de ces équations homogènes un remarquable parti; il serait aisé de faire quelque chose d'analogue dans le cas général du problème des trois corps; il suffirait d'éliminer les masses entre les équations du mouvement; l'ordre de ces équations se trouverait ainsi augmenté, mais on arriverait à n'avoir plus dans les deux membres que des polynômes entiers par rapport aux coordonnées rectangulaires et à leurs dérivées. Les équations ainsi obtenues ne pourraient servir à l'intégration, mais elles pourraient rendre de précieux services comme formules de vérification.

Par ce mémoire les termes qui ne dépendent que de m se trouveraient entièrement déterminés avec une précision infiniment plus grande que dans aucune des théories antérieures; les termes les plus importants ensuite sont ceux qui sont proportionnels à l'excentricité de la Lune et ne dépendent d'ailleurs que de m. Ces termes dépendent des mêmes équations différentielles; mais comme on connaît déjà une solution de ces équations et que celle que l'on cherche en diffère infiniment peu, tout se ramène à la considération des "équations aux variations." Or ces équations sont linéaires, elles sont à coëfficients périodiques; elles sont du 4ème ordre, mais la connaissance de l'intégrale de Jacobi permet de les ramener aisément au 2ème ordre. La théorie générale des équations linéaires à coëfficients périodiques nous apprend que ces équations admettent deux solutions particulières susceptibles d'être représentées par une fonction périodique multipliée par une exponentielle. C'est l'exposant de cette exponentielle qu'il s'agit d'abord de déterminer et cet exposant a une signification physique très simple et très importante, puisqu'il représente le moyen mouvement du périgée.

La solution adoptée par M. Hill est aussi originale que hardie. Notre équation différentielle doit être résolue par une série. En y substituant une série S à coëfficients indéterminés, on obtiendra une autre série Σ qui devra être identiquement nulle. En égalant à zéro les différents coëfficients de cette série Σ, on obtiendra des équations linéaires où les inconnues seront les coëfficients indéterminés de la série S. *Seulement ces équations de même que les inconnues étaient en nombre infini.* Avait-on le droit d'égaler à zéro le déterminant de ces équations? M. Hill l'a osé et c'était là une grande hardiesse; on n'avait jamais jusque-là considéré des équations linéaires en nombre infini; on n'avait jamais étudié les déterminants d'ordre infini; on ne savait même pas les définir et on n'était pas certain qu'il fût possible de donner à cette notion un sens précis. Je dois dire cependant, pour être complet, que M. Kotteritzsch avait dans les Poggendorf's Annales abordé le sujet. Mais son mémoire n'était guère connu dans le monde scientifique et en tout cas ne l'était pas de M. Hill. Sa méthode n'a d'ailleurs rien de commun avec celle du géomètre américain.

Mais il ne suffit pas d'être hardi, il faut que la hardiesse soit justifiée par le succès. M. Hill évita heureusement tous les piéges dont il était environné, et qu'on ne dise pas qu'en opérant de la sorte il s'exposait aux erreurs les plus grossières; non, si la méthode n'avait pas été légitime, il en aurait été tout de suite averti, car il serait arrivé à un résultat numérique absolument différent de ce que donnent les observations. La même méthode donne les coëfficients des diverses inégalités proportionnelles à l'excentricité et dont les plus importantes sont l'équation du centre et l'évection. Comparons ce calcul avec celui de Delaunay; la méthode de Hill avec deux ou trois approximations donne un grand nombre de décimales; Delaunay pour en avoir moitié moins devait prendre huit termes dans sa série, et ce n'était pas assez, il fallait évaluer par des procédés approchés le *reste* de la série; s'il avait fallu attendre qu'on arrive à des termes négligeables, la plus robuste patience se serait lassée. A quoi tient cette différence? Le mouvement g du périgée nous est donné par la formule

$$\cos g\pi = \varphi(m)$$

$\varphi(m)$ étant une série procédant suivant les puissances de m et rapidement convergente. M. Hill calcule directement $\cos g\pi$ et en déduit facilement g.

Au contraire, Delaunay s'efforce de développer g suivant les puissances croissantes de m. Or, la convergence du développement est beaucoup plus lente. On ne doit pas s'en étonner, si l'on supposait par exemple

$$\cos g\pi = 1 - \alpha m$$

on aurait $\cos g\pi$ tout de suite, tandis que le développement de g suivant les puissances de m convergerait très lentement si αm était très voisin de 1 et ne convergerait plus du tout si αm était plus grand que 1.

Et ce n'est pas tout, Delaunay traîne désormais un boulet dont il ne peut se débarrasser et qui dans toute la suite de ses calculs s'oppose à la convergence rapide de ses séries. Il serait amené à des séries de la forme $\Sigma A_n m^n$ dont les termes décroîtraient assez vite. Mais les coëfficients A_n dépendent de g, et g dépend de m. Comme il veut tout développer suivant les puissances de m, il développe ces coëfficients A_n. Or, le développement de A_n, et par conséquent les séries finales ne peuvent converger plus vite que g; nous sommes donc condamnés à n'avoir plus que des convergences très lentes.

On voit par ces considérations toute l'étendue du progrès réalisé par M. Hill. La méthode qui avait réussi pour le mouvement du périgée pouvait être appliquée au mouvement du nœud.

Désormais, les principales difficultés sont vaincues et les approximations suivantes sont plus aisées; les termes dépendant de l'excentricité ou de la parallaxe solaire, ou bien des puissances supérieures de l'excentricité lunaire, peuvent se calculer plus facilement; on n'a plus qu'à intégrer des équations linéaires à second membre, sachant intégrer les équations sans second membre, puisque ces équations sans second membre ne sont pas autre chose que celles même que M. Hill a eu à résoudre pour trouver le mouvement du périgée.

La méthode classique de la variation des constantes donne immédiatement la solution. On rencontre, néanmoins, encore des difficultés pratiques. M. Hill en signale une dans un article de l'Astronomical Journal, No. 471 (On the Inequalities in the Lunar Theory strictly proportional to the Solar Eccentricity). En dirigeant d'une certaine manière le calcul on arrive très vite à exprimer la solution par deux quadratures; mais les fonctions sous le signe $\int$ ne sont pas développables en séries trigonométriques, car elles sont susceptibles de devenir infinies. Pour éviter cette difficulté, M. Hill revient aux coordonnées polaires. Ce n'est pas là la solution qu'a adoptée dans ces derniers temps M. Brown; celle-ci est plus satisfaisante à beaucoup d'égards que celle de M. Hill; nous devons toutefois faire observer qu'elle oblige à quatre quadratures et que chacun des quatre termes ainsi obtenus est beaucoup plus grand en valeur absolue que le chiffre qui exprime le résultat final du calcul, c'est à dire que la somme algébrique des quatre termes.

C'est sur ces principes qu'est fondée la nouvelle théorie de M. Brown. Celle-ci est beaucoup plus parfaite que toutes les théories de la Lune que nous connaissons et il y a lieu d'espérer qu'elle permettra de pousser l'approximation plus loin que ne l'avaient fait Hansen et Delaunay. Il serait injuste de méconnaître la part personnelle que M. Brown a prise à ce grand travail, et l'originalité des idées qui lui appartiennent en propre. Mais il serait plus injuste encore d'oublier que c'est M. Hill qui a posé les principes; qu'il a vaincu les premières difficultés et que ces difficultés étaient les plus grandes. La nouvelle théorie tient le milieu entre celle de Hansen et celle de Delaunay, elle n'est ni purement numérique comme la première, ni purement littérale comme la seconde; la lettre m est seule remplacée par sa valeur numérique; les lettres qui désignent les autres constantes continuent à figurer explicitement.

Dans la théorie de la Lune, il convient de faire deux parts; il faut étudier d'abord les inégalités dues à l'action du Soleil; ce sont celles qui se produiraient si la Terre, le Soleil et la Lune existaient seuls et se réduisaient à des points matériels. Nous venons de voir ce que M. Hill et M. Brown nous en ont fait connaître. Mais ces inégalités ne sont pas les seules. En dehors du Soleil et de la Lune, il y a les planètes qui troublent le mouvement de notre satellite, d'abord par leur action directe, et ensuite parce que, par suite de leur attraction, le mouvement relatif de la Terre et du Soleil ne suit plus les lois de Képler. D'autre part la Terre n'est pas sphérique, et la Lune en est si rapprochée que l'attraction du renflement équatorial influe sur son mouvement.

Dans l'effet des planètes nous devons distinguer les variations séculaires, les plus importantes et les plus délicates de toutes. M. Hill s'en est occupé à diverses reprises; il a étudié successivement l'accélération séculaire du moyen mouvement, celle du mouvement du périgée et l'influence des variations de l'écliptique. Nous avons d'autre part les inégalités planétaires périodiques et surtout celles dont la période est assez longue; ce sont celles-là qui nous donnent encore aujourd'hui le plus de soucis, car on n'est jamais sûr de n'en avoir pas oublié. M. Neison en avait découvert une nouvelle due à Jupiter; M. Hill a montré qu'il s'était trompé dans le calcul du coëfficient; on lira cette discussion avec le plus grand intérêt.

Enfin, il a consacré un assez long mémoire à l'influence de l'aplatissement terrestre; nous signalerons surtout la discussion des observations de pendule, faite en déterminant les coëfficients numériques des différentes inégalités. Le théorème de Stokes nous apprend, en effet, que l'attraction du sphéroïde terrestre sur un point extérieur, et en particulier sur la Lune, est entièrement déterminée quand on connaît l'intensité de la pesanteur en tous les points de la surface terrestre.

La théorie de la Lune n'absorbait pas cependant toute son activité et les perturbations des planètes attirèrent également son attention; la question classique du développement de la fonction perturbatrice et les généralités sur le problème des 3 corps, la théorie de Céres et d'Hestia sont l'objet de plusieurs mémoires, mais nous nous arrêterons surtout sur un ouvrage de longue haleine, dont l'importante pratique est très grande.

La théorie de Jupiter, et en particulier la détermination de la masse de cette planète, l'avaient déjà occupé à plusieurs reprises quand il aborda l'étude complète des perturbations mutuelles de Jupiter et de Saturne.

Laplace avait abordé cette théorie, qui présente de grandes difficultés à cause de la grande inégalité, mais ses évaluations des termes du 2d ordre n'étaient que grossièrement approchées. Hansen fut plus heureux et dirigea le calcul de façon qu'il soit aisé de se rendre compte de l'importance des termes négligés, mais il n'a traité complètement que le cas de Saturne, se bornant pour Jupiter aux termes du premier ordre.

Les mémoires qui suivirent jusqu'à celui de Le Verrier ont peu ajouté à nos connaissances sur le sujet; mais en 1876 Le Verrier publia une théorie tout à fait complète; ses formules sont entièrement littérales, de sorte que si l'on est amené à apporter de petites corrections aux éléments, on trouvera immédiatement les corrections correspondantes des coëfficients des inégalités. D'ailleurs ce ne sont pas les coordonnées qui sont calculées mais les éléments elliptiques osculateurs, conformément à l'esprit de la méthode de la variation des constantes.

Cette façon de procéder avait ses avantages, mais elle exigeait un surcroît considérable de labeur, et comme résultat final la précision est insuffisante, de sorte que pour une partie de son calcul Le Verrier est forcé d'en revenir aux quadratures mécaniques. Les tables de Le Verrier ne sont d'ailleurs pas d'un usage commode. Mais ce n'est pas pour ces raisons que M. Hill entreprit son travail; au moment où il commença les tables de Le Verrier n'étaient pas publiées et on ne savait trop quand elles le seraient.

Celles qui étaient en usage, c'est à dire celles de Bouvard, ne répondaient plus aux besoins de l'Astronomie. Le but poursuivi par l'auteur était purement pratique, il fallait obtenir de bonnes tables dans un temps très court. C'est pourquoi il ne voulut pas perdre de temps à chercher une méthode nouvelle, et il se contenta de celle de Hansen. Nous ne devons donc pas nous attendre à trouver dans ce nouvel ouvrage la même originalité que dans les études sur la Lune. Les perfectionnements apportés à la méthode de Hansen ne porteront que sur des détails; ce sont avant tout des simplifications; c'est ainsi, par exemple, que pour ne pas avoir deux variables indépendantes, il ne fait pas de l'anomalie excentrique le même usage que Hansen; et cet usage en effet n'est justifié que si l'on doit se borner aux termes du premier ordre. M. Hill évite ainsi plusieurs transformations de séries qui allongeaient inutilement le travail dans la forme primitive de la méthode de Hansen.

Un autre perfectionnement consiste à incorporer parmi les termes du 2d ordre, les plus importants des termes du 3e ordre. Remarquons que c'était là se rapprocher de la méthode de Delaunay, qui serait à mon sens celle qu'il conviendrait d'employer pour l'étude de l'action mutuelle de Jupiter et de Saturne.

Une question délicate était celle du choix des valeurs à attribuer aux masses. M. Hill a été conduit à modifier les masses adoptées par Le Verrier, et c'est là peut-être la principale cause des divergences que l'on remarque entre ses tables et celles de son devancier.

Le résultat de ce long travail a été un volume de recherches théoriques et deux volumes de tables précises et commodes; l'un pour le mouvement de Jupiter, l'autre pour celui de Saturne.

Les derniers progrès de la Mécanique Céleste attiraient constamment l'attention de M. Hill, qui cherchait à s'assimiler et à éprouver les méthodes récemment proposées; nous venons de voir comment il avait transformé et appliqué à Jupiter la méthode de Hansen; il a publié d'autre part sur cette même méthode une étude critique dans l' "American Journal of Mathematics."

De même il ne pouvait manquer de soumettre à la discussion les travaux si intéressants de Gyldén; c'était l'époque où l'astronome suédois introduisait dans la Science la notion d'orbite intermédiaire. Cette idée de substituer à l'ellipse Képlerienne une orbite plus approchée était trop ingénieuse pour ne pas le frapper. Non seulement il a analysé et discuté les principaux mémoires de Gyldén, mais il a lui-même proposé une orbite intermédiaire qui pourrait être employée avec avantage dans la théorie de la Lune. On n'a qu'à distraire de la fonction perturbatrice deux termes destinés à mettre en évidence le mouvement du périgée et celui du nœud, et à tenir compte de ces deux termes dès la première approximation. Il y a là une idée dont on aurait pu tirer parti, si M. Hill ne l'avait lui-même d'avance rendue inutile par la perfection de ses premiers travaux.

Il comprit également la portée de la méthode de Delaunay; dans plusieurs notes il a montré que cette méthode n'est pas limitée à la théorie de la Lune et qu'on peut l'employer utilement dans le calcul des perturbations planétaires. Certes ce résultat n'était pas nouveau et Tisserand l'avait établi depuis longtemps, mais M. Hill a beaucoup ajouté à nos connaissances à ce sujet en approfondissant les conditions dans lesquelles ces nouveaux procédés sont applicables au calcul du mouvement d'Hécube ou des variations séculaires des excentricités et des inclinaisons. L'étude du mouvement d'Hécube se rattachait d'ailleurs naturellement pour lui à la recherche de ces solutions périodiques, à la découverte desquelles il avait eu une si grande part.

Il s'occupa rarement de la théorie de la figure de la Terre et de celle de la précession. Néanmoins un de ses premiers articles est relatif à la première de ces questions et il y est revenu plus récemment à deux reprises.

Ainsi aucune des parties de la Mécanique Céleste ne lui a été étrangère, mais son œuvre propre, celle qui fera son nom immortel, c'est sa théorie de Lune; c'est là qu'il a été non seulement un artiste habile, un chercheur curieux, mais un inventeur original et profond. Je ne veux pas dire que ces méthodes qu'il a créées ne sont applicables qu'à la Lune; je suis bien persuadé du contraire, je crois que ceux qui s'occupent des petites planètes seront étonnés des facilités qu'ils rencontreront le jour où en ayant pénétré l'esprit ils les appliqueront à ce nouvel objet. Mais jusqu'ici c'est pour la Lune qu'elles ont fait leurs preuves; quand elles s'étendront à un domaine plus vaste, on ne devra pas oublier que c'est à M. Hill que nous devons un instrument si précieux.

Mars 1905.