Sur les Invariants Arithmétiques.

Par M. *H. Poincaré* à Paris.

§ 1. *Introduction.*

Lejeune-Dirichlet dans deux remarquables mémoires: *Sur l'Usage des Séries Infinies dans la Théorie des Nombres* (Journal de *Crelle*, tome 18) et *Recherches sur diverses Applications de l'Analyse Infinitésimale à la Théorie des Nombres* (Journal de *Crelle*, tome 19) est parvenu à déterminer le nombre des classes des formes quadratiques d'un déterminant donné. Il s'est servi pour cela de certaines séries infinies dont les propriétés sont remarquables.

J'ai eu moi-même l'occasion de me servir de séries identiques ou analogues dans divers articles relatifs aux *Invariants Arithmétiques* qui ont paru dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris en 1879 et dans ceux du Congrès d'Alger de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences en 1881.

Je demande la permission de revenir sur divers points relatifs à ces séries pour présenter une série de remarques, qui n'ont peut-être pas par elles-mêmes un très grand intérêt, mais qui ne sont cependant pas indignes d'attention, à cause du lien qui les rattache à l'œuvre de *Dirichlet.*

Ces remarques se rapportent aux fonctions fuchsiennes, aux fonctions abéliennes, aux fonctions elliptiques et à un certain nombre de transcendantes nouvelles plus ou moins apparentées aux fonctions elliptiques et fuchsiennes et à la fonction de *Fredholm.*

Ce qui permet de réunir ainsi dans un même travail un tel nombre de fonctions si diverses, c'est la communauté de leurs propriétés arithmétiques et leurs relations avec l'analyse de *Lejeune-Dirichlet.*

§ 2. *Invariants des formes linéaires.*

On sait qu'au point de vue algébrique, une forme linéaire

$$ax + by$$

n'a pas d'invariant; je veux dire qu'il n'existe pas de fonction uniforme des deux coëfficients a et b qui ne changent pas quand on remplace la forme linéaire par sa transformée par une substitution linéaire quelconque.

Elle en possède au contraire au point de vue arithmétique, c'est-à-dire qu'il y a des fonctions uniformes des deux coëfficients qui ne changent pas quand on remplace la forme linéaire par sa transformée par une substitution linéaire quelconque *à coëfficients entiers*. Ce sont les *Invariants Arithmétiques*.

Un bon exemple est fourni par la série

$$(1.)\qquad \Sigma \frac{1}{(am+bn)^k} = \Phi_k,$$

où m et n peuvent prendre tous les systèmes de valeurs entières possibles, positives, négatives ou nulles, à l'exception du système $m=0,\ n=0$. Cette série est absolument convergente pourvu que le nombre k soit plus grand que 2.

Dans les articles que j'ai cités, j'ai montré comment ces séries et en même temps les fonctions doublement périodiques peuvent s'exprimer par des intégrales définies simples. J'ai indiqué ensuite quel parti on peut en tirer pour reconnaître si deux formes quadratiques définies de même déterminant négatif sont ou non équivalentes, au sens arithmétique du mot.

Ces séries se rattachent aux fonctions elliptiques par le lien le plus direct. Si en effet, nous adoptons les notations de *Weierstrass*, et que nous fassions

$$a = 2\omega, \qquad b = 2\omega',$$

on aura

$$\Phi_4 = \frac{g_2}{3.4.5}; \quad \Phi_6 = \frac{g_3}{4.5.7}; \quad \Phi_8 = \frac{g_2^2}{400.3.7}; \quad \Phi_{10} = \frac{g_2 g_3}{80.3.7.11}; \ldots$$

Plus généralement, envisageons une fonction uniforme $\varphi(a, b)$ qui joue le rôle d'invariant arithmétique, c'est-à-dire qui satisfasse à la condition

$$\varphi(a, b) = \varphi(\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b)$$

quand α, β, γ, δ sont des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Il est clair que ce sera une fonction uniforme de g_2 et de g_3 et que réciproquement toute fonction uniforme de g_2 et de g_3 sera un invariant.

Considérons maintenant en particulier les invariants qui sont des fonctions homogènes de a et de b, ce qui est le cas de la fonction Φ_k définie par l'équation (1.); on aura

$$\varphi(a, b) = b^{-k}\ \varphi\left(\frac{a}{b}, 1\right),$$

$$\varphi(\alpha a + \beta b,\ \gamma a + \delta b) = (\gamma a + \delta b)^{-k}\ \varphi\left(\frac{\alpha a + \beta b}{\gamma a + \delta b}, 1\right)$$

d'où, en faisant $b = 1$,

$$\varphi\left(\frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, 1\right) = (\gamma a + \delta)^k\, \varphi(a, 1)$$

ce qui montre que si k est un entier positif et pair, $\varphi(a, 1)$ est une fonction thétafuchsienne correspondant à ce groupe fuchsien particulier qui engendre les fonctions modulaires.

On peut se demander si cette fonction peut être représentée par une de ces séries thétafuchsiennes que j'ai définies dans le § 1 de mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes (Acta Mathematica, tome 1). Et d'abord quelle est la forme de ces séries thétafuchsiennes dans le cas qui nous occupe.

Soit $H(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque, homogène d'ordre $-2k$ par rapport à x et à y et envisageons les séries:

$$(2.)\qquad \Sigma H(\alpha a + \beta,\ \gamma a + \delta) = \Sigma (\gamma a + \delta)^{-2k} H\left(\frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, 1\right)$$

et

$$(2^{\text{bis}}.)\qquad \Sigma H(\alpha a + \beta b,\ \gamma a + \delta b)$$

étendues à tous les systèmes de nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, qui satisfont à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

La 1ère est une série thétafuchsienne, la 2de est un invariant arithmétique. Il faut toutefois que les séries convergent. En se reportant au mémoire cité sur les fonctions fuchsiennes, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence d'une série de la forme (2.) sont:

1° que la fonction $H(x, 1)$ n'ait pas d'infini sur le cercle fondamental;

2° que k soit un entier plus grand que 1 (au moins égal à 2).

Mais dans le cas qui nous occupe, ces conditions doivent être légèrement modifiées, parce que ce qui joue ici le rôle du cercle fondamental, c'est une droite: l'axe des quantités réelles.

Il est aisé de transformer cette droite en un cercle par un changement linéaire de variable; on retombera sur une série de la même forme.

Soit par exemple

$$(3.)\qquad \Theta(z) = \Sigma H\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, 1\right)(\gamma z+\delta)^{-2k}$$

et posons

$$z = i\frac{t-1}{t+1}.$$

Soit de plus

$$z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = i\frac{t'-1}{t'+1};\qquad t' = \frac{\alpha' t+\beta'}{\gamma' t+\delta'},$$

l'égalité (3.) deviendra

$$(3^{\text{bis}})\qquad (t+1)^{-2k}\,\Theta\left(i\frac{t-1}{t+1}\right) = \Sigma H_1\left(\frac{\alpha' t+\beta'}{\gamma' t+\delta'}\right)(\gamma' t+\delta')^{-2k}$$

en posant

$$H_1(t) = H\left(i\frac{t-1}{t+1}, 1\right)(t+1)^{-2k}\,.$$

On voit que si la fonction homogène $H(x, y)$ n'admet pas en $y=0$ un zéro d'ordre $2k$ au moins, la fonction $H_1(t)$ aura un infini pour $t=-1$, c'est-à-dire sur le cercle fondamental et la convergence ne pourra avoir lieu.

Les conditions nécessaires et suffisantes de la convergence sont donc:

1° que le nombre k soit un entier plus grand que 1;

2° que la fonction $H(x, y)$ ne puisse devenir infinie quand le rapport $\frac{y}{x}$ est réel;

3° qu'elle admette un zéro d'ordre $2k$ pour $y=0$.

Nous avons ainsi une nouvelle forme plus générale pour représenter les invariants arithmétiques, mais si nous revenons aux fonctions Φ_k définies par l'équation (1.) une nouvelle question se pose. La fonction thétafuchsienne $\Phi_k(a, 1)$ peut-elle être représentée par une série thétafuchsienne?

Nous savons que dans le cas où le polygone générateur R_0 est tout entier à l'intérieur du cercle fondamental et n'a aucun sommet sur ce cercle, toute fonction thétafuchsienne peut être représentée par une série thétafuchsienne pourvu que $k \geqq 2$ (loco citato, page 246). Mais il n'en est pas toujours de même quand le polygone générateur a un sommet sur le cercle fondamental. Il y a alors une condition à remplir (cf. loco cit. pages 215 et 275). Si α_i est un sommet situé sur ce cercle, et $\Theta_1(t)$ une série thétafuchsienne, on devra avoir

$$\lim (t-\alpha_i)^{2k}\,\Theta_1(t) = 0. \qquad \text{(pour } t=\alpha_i)$$

Revenons à l'équation (3^{bis}) et faisons

$$\Theta_1(t) = (t+1)^{-2k}\,\Theta\Big(i\frac{t-1}{t+1}\Big); \quad \alpha_i = -1.$$

On devra avoir

$$\lim \Theta(z) = 0. \qquad \text{(pour } z=\infty)$$

Si donc Φ_k était représentable par une série thétafuchsienne, on devrait avoir

$$\lim \Phi_k(z,1) = \lim \Sigma\frac{1}{(mz+n)^k} = 0. \qquad \text{(pour } z=\infty)$$

Or on a évidemment

$$\lim \Sigma\frac{1}{(mz+n)^k} = 2\lim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} \gtrless 0.$$

Donc les Φ_k ne peuvent être mis sous la forme de séries thétafuchsiennes.

Mais à un certain point de vue les séries Φ_k peuvent être regardées comme une degénérescence des séries thétafuchsiennes.

Soit en effet ξ une quantité quelconque, non réelle, et envisageons la série thétafuchsienne

$$\Theta(z,\xi) = \Sigma\frac{1}{[(\alpha z+\beta)-\xi(\gamma z+\delta)]^{2k}}.$$

Si nous faisions tendre ξ vers zéro, nous aurions à la limite dans la série en question, une infinité de termes qui deviendraient égaux entre eux, ce qui suffit pour montrer que la série ne saurait être uniformément convergente.

Groupons les termes de la série convenablement, c'est-à-dire en réunissant ceux de ces termes qui deviendraient égaux entre eux à la limite. On les déduit du 1er d'entre eux en changeant γ et δ en

$$\gamma + m\alpha, \quad \delta + m\beta$$

m étant un entier quelconque positif ou négatif. Le terme général en question peut alors s'écrire:

$$\frac{1}{[(\alpha z+\beta)(1-m\xi)-\xi(\gamma z+\delta)]^{2k}}.$$

Nous sommes ainsi conduits à sommer la série

$$\Sigma \frac{1}{(a+bm)^{2k}}$$

où a et b sont des constantes et où l'on donne à m toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. La sommation est aisée; on sait en effet que l'on a

$$\pi \operatorname{cotg} x\pi - \pi \operatorname{cotg} y\pi = \Sigma\left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+m}\right)$$

d'où

$$\Sigma \frac{1}{(a+bm)^{2k}} = \frac{-1}{b^{2k}}(2k-1)!\ F_k\left(\frac{a}{b}\right)$$

en désignant par $F_k(x)$ la dérivée $(2k-1^e)$ de $\pi \operatorname{cotg} x\pi$.

Dans cette formule il faut faire

$$a = (\alpha z + \beta) - \xi(\gamma z + \delta), \quad b = -\xi(\alpha z + \beta)$$

d'où

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{\xi} + \frac{\gamma z + \delta}{\alpha z + \beta}.$$

Or si nous supposons x très grand, et par exemple de partie imaginaire positive, on aura sensiblement

$$(-1)(2k-1)!\ F_k(x) = A_k e^{2i\pi x},$$

A_k étant une constante ne dépendant que de k; si donc ξ est très petit et que sa partie imaginaire soit positive; on aura

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(\alpha z+\beta)(1-m\xi) - \xi(\gamma z+\delta)]^{2k}} = A_k \frac{e^{-\frac{2i\pi}{\xi}}}{\xi^{2k}} \frac{1}{(\alpha z+\beta)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta}}$$

d'où

$$\Theta(z, \xi) = A_k \frac{e^{-\frac{2i\pi}{\xi}}}{\xi^{2k}} \Sigma \frac{1}{(\alpha z+\beta)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta}}.$$

La sommation est étendue à tous les systèmes d'entiers α et β, *premiers entre eux*. Étant donnés deux entiers α et β premiers entre eux, on peut en effet toujours en déduire deux autres entiers γ et δ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; le problème comporte même une infinité de solutions, mais qui toutes conduisent à la même valeur de l'exponentielle $e^{2i\pi\frac{\gamma z+\delta}{\alpha z+\beta}}$.

Nous sommes donc conduits à un nouveau type d'invariants arithmétiques représentés par la série:

$$(4.)\qquad \Sigma \frac{1}{(\alpha a+\beta b)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}}.$$

La convergence de cette série est évidente si le rapport $\frac{a}{b}$ a sa partie imaginaire positive, il en est alors encore de même du rapport $\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}$ de sorte que l'exponentielle

$$(5.)\qquad e^{2i\pi\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}}$$

est plus petite que 1 en valeur absolue.

Si au contraire le rapport $\frac{a}{b}$ a sa partie imaginaire négative, cette exponentielle a son module plus grand que 1; mais il est limité; car parmi les expressions en nombre infini

$$\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}$$

il y en a une dont la partie imaginaire est plus grande en valeur absolue que pour toutes les autres. La série converge donc encore.

Si ξ tend vers zéro de telle façon que sa partie imaginaire soit négative, il faut remplacer l'exponentielle (5.) par l'exponentielle

$$e^{-2i\pi\frac{\gamma a+\delta b}{\alpha a+\beta b}},$$

mais la série reste encore convergente.

Posons maintenant

$$H(x, y)=\frac{1}{(x-\xi_1 y)(x-\xi_2 y)\dots(x-\xi_{2k} y)}$$

et

$$\Theta(a, b)=\Sigma H(\alpha a+\beta b, \gamma a+\delta b).$$

Si nous décomposons la fonction rationnelle $H(x, y)$ en éléments simples, nous pouvons écrire

$$H(x, y)=\Sigma \frac{A_i x^{1-2k}}{x-\xi_i y},$$

les A_i étant des constantes. Je puis écrire ensuite

$$\Theta(a, b) = \Sigma\Sigma\Sigma \frac{A_i(\alpha a + \beta b)^{1-2k}}{X_i + Y_i m}$$

où

$$X_i = (\alpha a + \beta b) - \xi_i(\gamma a + \delta b); \quad Y_i = -\xi_i(\alpha a + \beta b).$$

Le premier signe Σ se rapporte à l'indice i; le second au nombre entier m; le troisième à tous les systèmes d'entiers α, β premiers entre eux.

Si nous effectuons d'abord les deux premières sommations, nous trouvons

$$(6.) \qquad \Sigma_i \frac{\pi A_i}{Y_i} \operatorname{cotg} \pi \frac{X_i}{Y_i} (\alpha a + \beta b)^{1-2k}.$$

Faisons tendre les ξ_i vers zéro; $\frac{X_i}{Y_i}$ tendra vers l'∞; et $\operatorname{cotg} \pi \frac{X_i}{Y_i}$ tendra vers $+\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$ suivant le signe de la partie imaginaire de $\frac{X_i}{Y_i}$ ou ce qui revient au même, suivant celui de la partie imaginaire de ξ_i; de sorte que l'expression (6.) aura pour valeur asymptotique

$$-\pi\sqrt{-1}\,\Sigma \frac{A_i \varepsilon_i}{\xi_i} \frac{1}{(\alpha a + \beta b)^{2k}}$$

où ε_i est égal à $+1$ ou à -1, suivant le signe de la partie imaginaire de ξ_i.

Si les parties imaginaires étaient toutes de même signe, le coëfficient $\Sigma \frac{A_i \varepsilon_i}{\xi_i}$ se reduirait à

$$\pm \Sigma \frac{A_i}{\xi_i}$$

et par conséquent à zéro. Nous supposerons donc que les parties imaginaires des ξ_i ne sont pas toutes de même signe; et nous poserons

$$\Sigma \frac{A_i \varepsilon_i}{\xi_i} = B \gtrless 0.$$

Il vient alors

$$\lim \Theta(a, b) = -\pi\sqrt{-1}\, B\, \Sigma \frac{1}{(\alpha a + \beta b)^{2k}}.$$

La sommation s'étend à tous les entiers α et β *premiers entre eux*, mais il est clair que l'expression

$$\Sigma \frac{1}{(\alpha a + \beta b)^{2k}}$$

où α et β sont premiers entre eux, ne diffère de la même expression où

α et β sont des entiers quelconques, que par le facteur constant $\Sigma\frac{1}{m^{2k}}$ où m prend toutes les valeurs entières positives.

Ainsi se trouvent rattachés les invariants arithmétiques de la forme (1.) et aussi ceux de la forme (4.) à ceux de la forme (2.) ou (2^{bis}.) qui s'expriment directement par une série thétafuchsienne.

L'uniformité de la convergence de ces séries s'établirait aisément, ce qui permettrait de se rendre mieux compte de la façon dont ces séries peuvent s'exprimer en fonctions de g_2 et de g_3, ou ce qui revient au même de la fonction fuchsienne:

$$x = f(z) = f\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

et de sa dérivée.

Prenons d'abord les fonctions thétafuchsiennes les plus simples, en supposant $k=2$. Elles seront de la forme:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{P(x)}{x(x-1)Q(x)} \tag{7.}$$

où le degré de $Q(x)$ dépasse d'une unité au moins celui de $P(x)$. Soient d'ailleurs q et p ces deux degrés de telle sorte que

$$q \geqq p+1.$$

Soient de plus $x_1, x_2, \ldots x_q$ les zéros de $Q(x)$; et $z_1, z_2, \ldots z_q$ les valeurs correspondantes de z. Notre fonction (7.) pourra s'exprimer par une série thétafuchsienne de la forme (2.) où $k=2$ et où

$$H(z;\,1) = \frac{\Pi(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_q)(z-t_1)\ldots(z-t_r)}$$

où $z_1, z_2, \ldots z_q$ sont les quantités définies plus haut et dont la partie imaginaire est positive, tandis que $t_1, t_2, \ldots t_r$ ont leur partie imaginaire négative. Quant à $\Pi(z)$, c'est un polynôme de degré $q+r-4$. Nous prendrons pour plus de simplicité:

$$q=1, \quad r=3, \quad p=0; \quad q+r-4=0$$

de sorte que $P(x)$ et $\Pi(z)$ se réduisent à des constantes. Faisons maintenant tendre simultanément z_1, t_1, t_2, t_3 vers zéro de telle façon que x_1 tende vers l'∞. Alors à un facteur constant près, la série thétafuchsienne tend vers une série de la forme (1.) et la fonction (7.) vers

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{1}{x(x-1)}.$$

Si nous supposons au contraire:

$$q=4, \quad r=0, \quad p=3, \quad q+r-4=0$$

tous les pôles de $H(z, 1)$ ont leurs parties imaginaires positives et quand les z_i tendront simultanément vers zéro, la série thétafuchsienne tendra à un facteur constant près vers une série de la forme (4.) et la fonction (7.) vers

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{P_3}{x(x-1)},$$

P_3 étant un polynôme du 3[e] degré.

Supposons enfin:

$$q=0, \quad r=4, \quad q+r-4=0, \quad p<0.$$

L'inégalité $p<0$ signifie que le polynôme $P(x)$ doit être identiquement nul. Ici tous les pôles de $H(z)$ ont leur partie imaginaire négative, de sorte qu'à la limite la série thétafuchsienne devra se réduire à une série de la forme (4.). *Il y a donc de ces séries de la forme* (4.) *qui sont identiquement nulles.*

D'autre part, en développant les considérations qui précèdent, on pourrait trouver entre les séries de la forme (4.) et (1.) diverses relations d'où l'on pourrait sans doute déduire des théorèmes d'Arithmétique.

Il va sans dire que toutes ces séries qui définissent les invariants arithmétiques n'auraient aucune signification si le rapport $\frac{a}{b}$ était réel. Elles n'en auraient pas non plus si k (dans la formule 1) n'était pas un entier pair; si k était un entier impair, Φ_k serait identiquement nul. Si k n'était pas entier, chacun des termes de la série Φ_k ne serait pas entièrement déterminé et il n'y a pas moyen de choisir leur détermination de façon à conserver à la série toutes ses propriétés essentielles.

Il faudrait donner un moyen d'exprimer toutes ces séries à l'aide de g_2 et de g_3 (ou de x et de $\frac{dx}{dz}$). C'est là un problème sur lequel je suis revenu à diverses reprises dans mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes sans pouvoir en donner une solution complète et satisfaisante. Je me bornerai encore ici à développer certaines considérations qui sont de nature à jeter quelque lumière sur ce problème, et qui en même temps nous fournissent une généralisation inattendue de la théorie des intégrales abéliennes de 1[ère] et de 2[de] espèce. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

§ 3. *Relations avec les fonctions fuchsiennes.*

Rappelons d'abord quelques-uns des résultats de mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes (Acta Mathematica tome 1).

Outre les séries thétafuchsiennes, j'ai eu à considérer certaines fonctions que j'ai appelées $\Delta(z)$ (loco cit. p. 238). Ces fonctions sont de la forme suivante:

$$\Delta(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}\frac{\Pi(x-a_i)^{\mu_i}}{Q}.$$

Dans cette formule $x=f(z)$ représente une fonction fuchsienne de z; les nombres h et μ_i sont entiers; Q est un polynôme entier en x. Les a_i sont les points singuliers de l'équation différentielle qui définit la fonction fuchsienne, c'est-à-dire les valeurs que prend la fonction $f(z)$ aux sommets du polygone générateur du groupe fuchsien. Les entiers h et μ_i ainsi que le degré du polynôme Q sont assujettis à certaines inégalités.

Dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a que trois points singuliers a_i et nous pouvons supposer que ce sont $0, 1, \infty$; le polygone générateur se décompose en deux triangles ayant pour angles 0 (pour $x=\infty$), $\frac{\pi}{2}$ (pour $x=0$), $\frac{\pi}{3}$ (pour $x=1$). Si nous prenons alors $h=1$ pour nous borner au cas le plus simple, nous aurons

$$\Delta(z)=\frac{dz}{dx}\frac{x(x-1)}{x-x_1},$$

x_1 étant une constante quelconque.

Si nous prenons un h quelconque, nous aurons

$$\Delta(z)=\left(\frac{dz}{dx}\right)^h\frac{x^\lambda(x-1)^{\lambda_1}}{F(x)}R(x), \tag{1.}$$

$F(x)$ étant un polynôme de degré p et les nombres entiers λ, λ_1 et p étant déterminés comme il suit:

$$(2.)\quad \begin{cases} \text{si } h=6n+1, & \lambda=3n+1, \quad \lambda_1=4n+1, \quad p=n+1 \\ \text{si } h=6n+2, & \lambda=3n+1, \quad \lambda_1=4n+2, \quad p=n+1 \\ \text{si } h=6n+3, & \lambda=3n+2, \quad \lambda_1=4n+2, \quad p=n+1 \\ \text{si } h=6n+4, & \lambda=3n+2, \quad \lambda_1=4n+3, \quad p=n+1 \\ \text{si } h=6n+5, & \lambda=3n+3, \quad \lambda_1=4n+4, \quad p=n+2 \\ \text{si } h=6n+6, & \lambda=3n+3, \quad \lambda_1=4n+4, \quad p=n+1. \end{cases}$$

Quant à $R(x)$ c'est une fonction rationnelle de x où le dénominateur est de degré au moins égal au numérateur et où le dénominateur ne contient pas de facteur x ou $x-1$.

Considérons maintenant les fonctions thétafuchsiennes de 1[ère] espèce, c'est-à-dire celles qui restent toujours finies. Elles sont de la forme:

$$(3.)\qquad \Theta(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1}\frac{F(x)}{x^{\lambda}(x-1)^{\lambda_1}},$$

où $F(x)$ est un polynôme de degré $p-2$ et où les entiers λ, λ_1 et p ont des valeurs conformes au tableau (2.)

On voit que pour $h=1, 2, 3, 4, 6$ il n'y a pas de fonction thétafuchsienne de 1[ère] espèce et que ces fonctions apparaissent pour la 1[ère] fois pour $h=5$.

Si nous considérons la formule (1.), nous voyons que la fonction $\varDelta(z)$ a $p+q$ infinis, q étant le degré du dénominateur de $R(x)$; que quand ces infinis sont regardés comme donnés, le nombre maximum des paramètres arbitraires contenus dans $\varDelta(z)$ est égal à $q+1$, c'est-à-dire au nombre des coefficients du numérateur de $R(x)$.

Entre les $p+q$ résidus de $\varDelta(z)$, il y a donc $p-1$ relations linéaires. D'autre part, l'examen de la formule (3.) nous montre qu'il y a $p-1$ fonctions thétafuchsiennes de 1[ère] espèce. Et comme les nombres entiers h, λ, λ_1, p ont même valeur dans les formules (1.) et (3.), nous devons conclure que le nombre des relations entre les résidus de $\varDelta(z)$ est égal au nombre des fonctions thétafuchsiennes de 1[ère] espèce.

C'est là une propriété qui n'est pas spéciale aux fonctions modulaires et qui est vraie d'une fonction fuchsienne quelconque (cf. loco cit. page 266). Bornons-nous par exemple aux fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cerle fondamental, et soit $\mathit{\Delta}(z)$ une fonction de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} X,$$

x et X étant deux fonctions fuchsiennes; de telle sorte que $\mathit{\Delta}(z)$ satisfasse à la condition:

$$\mathit{\Delta}\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=(\gamma z+\delta)^{2h}\mathit{\Delta}(z).$$

Supposons que cette fonction $\mathit{\Delta}(z)$ ait des infinis donnés, différents des sommets du polygone générateur. *Il y aura entre les résidus de cette fonction autant de relations linéaires qu'il y a de fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce* de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1} X.$$

Et comme on démontre d'autre part que le nombre de ces relations linéaires est égal au nombre des séries thétafuchsiennes, c'est ainsi que j'ai démontré dans le mémoire cité que toute fonction thétafuchsienne de 1ère espèce est représentable par une série thétafuchsienne, ce qu'il aurait été très difficile d'établir par une autre voie.

Quoi qu'il en soit, ces résultats vont être notre point de départ. Considérons une fonction $\mathit{\Delta}$ satisfaisant à la définition précédente, nous remarquerons que sa dérivée d'ordre $2h+1$

$$\frac{d^{2h+1}\mathit{\Delta}}{dz^{2h+1}}$$

est une fonction thétafuchsienne (cf. loco cit. page 247). Soit alors

$$\mathit{\Delta}=X\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h};\quad \frac{d^{2h+1}\mathit{\Delta}}{dz^{2h+1}}=Y\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1},$$

X et Y étant des fonctions fuchsiennes, c'est-à-dire des fonctions rationnelles de x dans le cas particulier des fonctions modulaires et des fonctions fuchsiennes de genre zéro, ou des fonctions rationnelles de x et de y dans le cas général des fonctions fuchsiennes de genre quelconque, qui s'expriment comme on le sait, à l'aide de deux d'entre elles, x et y liées par une relation algébrique.

On voit que Y est une expression linéaire par rapport à X et à ses dérivées $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, ... Comment former cette expression; égalons-la à zéro.

L'équation

$$Y = 0$$

sera une équation différentielle linéaire en X, quelle en sera la signification? Soit

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x, y) \tag{4.}$$

l'équation linéaire du 2ᵈ ordre qui a donné naissance au système de fonctions fuchsiennes considéré. Elle admet comme intégrales

$$z\sqrt{\frac{dx}{dz}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{dx}{dz}}.$$

Eh bien, l'équation $Y = 0$ admettra comme intégrales:

$$z^{2h}\left(\frac{dx}{dz}\right)^h,\ z^{2h-1}\left(\frac{dx}{dz}\right)^h, \ldots \quad z\left(\frac{dx}{dz}\right)^h,\ \left(\frac{dx}{dz}\right)^h$$

de sorte qu'on l'obtiendra en formant l'équation linéaire à laquelle satisfont les puissances $2h^{es}$ des intégrales de l'équation (4.).

Et en effet, si oubliant un instant la signification de la fonction Λ, nous cherchons à intégrer l'équation $Y = 0$, nous trouvons d'abord que la derivée $2h+1^e$ de Λ est nulle, par conséquent que Λ est un polynôme de degré $2h$ en z, et X un pareil polynôme multiplié par $\left(\frac{dx}{dz}\right)^h$.

Cela posé, envisageons une fonction thétafuchsienne quelconque Θ; intégrons-la $2h+1$ fois par rapport à z, et soit $M(z)$ le résultat de cette intégration de telle sorte que

$$\frac{d^{2h+1}M}{dz^{2h+1}} = \Theta(z).$$

Soit

$$M = X\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h};\ \Theta(z) = Z\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1},$$

nous aurons

$$Y = Z,$$

Y étant formé avec X comme nous l'avons dit plus haut, tandis que Z est une fonction fuchsienne, c'est-à-dire une fonction rationnelle de x et y que nous regardons comme donnée. Comme nous savons intégrer l'équation linéaire sans second membre $Y = 0$, nous saurons intégrer l'équation à 2ᵈ membre $Y = Z$.

Quelles sont maintenant les propriétés fondamentales de la fonction $M(z)$. Pour cela reprenons l'équation $Y=Z$, et la surface de *Riemann* relative à la relation algébrique entre x et y. Décrivons sur cette surface un cycle fermé, ou un contour fermé enveloppant certains points singuliers, x, y et Z reviendront à leur valeur primitive, z subira une des substitutions du groupe fuchsien et se changera en

$$z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

Ainsi la nouvelle comme l'ancienne détermination de X satisferont à une même équation $Y=Z$, de sorte que la différence de ces deux déterminations devra satisfaire à $Y=0$, c'est-à-dire se réduire à un polynôme en z multiplié par $\left(\frac{dx}{dz}\right)^h$; j'écris:

$$X' = X + \left(\frac{dx}{dz}\right)^h P,$$

X' étant la nouvelle détermination de X, et P un polynôme de degré $2h$ en z. Or nous avons

$$M(z) = X\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}, \quad M\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = M(z') = X'\left(\frac{dx}{dz'}\right)^{-h} = X'\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}\left(\frac{dz}{dz'}\right)^{-h},$$

$$M\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = X'\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(\gamma z+\delta)^{-2h}$$

d'où enfin:

$$M\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = M(z)(\gamma z+\delta)^{-2h} + (\gamma z+\delta)^{-2h} P.$$

Il vaudra mieux dans ces conditions, mettre la relation sous la forme homogène, en mettant à profit l'idée de M. *Klein*. Soit $F(z)$ une fonction de z et convenons de poser:

$$F(\xi,\eta) = \eta^k F\left(\frac{\xi}{\eta}\right),$$

où k est égal à 0, si $F(z)$ est une fonction fuchsienne, à $2h$, si $F(z)$ est la fonction $M(z)$ ou $\varDelta(z)$ et à $-2h-2$, si $F(z)$ est la fonction $\Theta(z)$. Dans ces conditions on a, pour une substitution quelconque du groupe fuchsien

$$(5.) \qquad \begin{cases} \varDelta(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta) = \varDelta(\xi,\eta), \\ \Theta(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta) = \Theta(\xi,\eta), \\ M(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta) = M(\xi,\eta) + P(\xi,\eta), \end{cases}$$

$P(\xi,\eta)$ étant un polynôme homogène de degré $2h$ en ξ et η.

Et c'est ici que commence à apparaître l'analogie que j'avais en vue avec la théorie des intégrales abéliennes. Les fonctions Θ, ou plutôt les fonctions rationnelles Z qui en dépendent, joueront le rôle des expressions algébriques à intégrer, les fonctions M joueront le rôle des intégrales abéliennes elles-mêmes; enfin les polynômes P joueront celui des périodes.

Pour justifier cette assimilation, il suffit de montrer que la théorie des intégrales abéliennes rentre comme cas particulier dans la théorie générale que je viens d'esquisser. Considérons, en effet, le cas où le polygone générateur du groupe fuchsien se réduit à un polygone de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est égale à 2 droits. Supposons de plus $h=0$; nous aurons alors affaire à des fonctions thétafuchsiennes incapables d'être représentées par des séries thétafuchsiennes, puisque ces séries ne peuvent converger que si $h+1$ est au moins égal à 2. Mais cela ne fait rien.

On a alors simplement

$$M(z)=\int \Theta(z)\,dz=\int Z\,dx.$$

Comme Z est une fonction rationnelle de x et de y, on voit que M est simplement une intégrale abélienne.

Revenons au cas de $h>0$; nous distinguerons parmi les fonctions $M(z)$:

1°. Celles qui ne deviennent jamais infinies; *ce seront les intégrales de 1ère espèce.* On les obtiendra en partant des fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce.

Le nombre des intégrales de 1ère espèce indépendantes (c'est-à-dire dont une combinaison linéaire ne se réduit pas à un polynôme $P(\xi,\eta)$ de degré $2h$) est évidemment égal au nombre des fonctions thétafuchsiennes de 1ère espèce, c'est-à-dire (vide supra) à $p-1$.

2°. Celles qui deviennent infinies, mais n'ont d'autre singularité que des pôles. *Ce sont les intégrales de 2e espèce.*

Combien y a-t-il d'intégrales de 2e espèce indépendantes (c'est-à-dire dont une combinaison linéaire ne se réduit pas à une fonction $\Delta(z)$ plus une intégrale de première espèce.)?

Considérons celles qui admettent q infinis donnés, ou quelques-uns de ces infinis. S'il y en a plus de $p-1$, on pourra trouver une combinaison linéaire de ces intégrales dont les résidus satisfassent à $p-1$ relations linéaires quelconques. Soit $C(z)$ cette combinaison. Par exemple on peut prendre les $p-1$ relations auxquelles doivent satisfaire les résidus d'une fonction $\Lambda(z)$. Alors les résidus de l'intégrale $C(z)$ sont égaux à ceux d'une fonction $\Lambda(z)$ et la différence $C(z)-\Lambda(z)$ ne devenant plus infinie est une intégrale de 1ère espèce.

Le nombre des intégrales indépendantes est donc au plus égal à $p-1$.

La forme de ce raisonnement suppose que tous les infinis sont simples, mais il serait aisé de l'étendre aux infinis multiples.

Considérons maintenant la fonction

$$\Phi(z, a) = \Sigma \frac{1}{z - \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}} \frac{1}{(\gamma a + \delta)^{2h+2}}$$

(cf. loco citato page 242). C'est une intégrale de 2e espèce, et même elle peut être considérée comme l'intégrale de 2e espèce élémentaire. C'est de plus une fonction thétafuchsienne de a.

Considérons $p-1$ de ces fonctions

$$\Phi(z, a_1),\ \Phi(z, a_2), \dots \Phi(z, a_{p-1})$$

en choisissant $a_1, a_2, \dots a_{p-1}$ d'une manière quelconque. Si ces $p-1$ fonctions n'étaient pas distinctes, on pourrait trouver $p-1$ nombres $A_1, A_2, \dots A_{p-1}$ tels que la combinaison

$$\Sigma A_i \Phi(z, a_i)$$

se réduise à une fonction $\Lambda(z)$ plus une intégrale de 1ère espèce. C'est-à-dire qu'on pourrait trouver une fonction $\Lambda(z)$ qui admette seulement les infinis

$$a_1, a_2, \dots a_{p-1}$$

avec les résidus

$$A_1, A_2, \dots A_{p-1}.$$

Mais les résidus d'une fonction $\Lambda(z)$ sont assujettis à $p-1$ relations linéaires distinctes auxquelles les A_i devraient satisfaire, ce qui ne serait possible (puisque le nombre des relations linéaires *distinctes* est égal à celui des A_i) que si tous ces nombres A_i étaient nuls.

Donc les fonctions $\Phi(z, a_i)$ sont indépendantes.

Donc le nombre des intégrales indépendantes est au moins égal à $p-1$.

En résumé,

Le nombre des intégrales indépendantes de 2^de^ espèce est égal à celui des intégrales indépendantes de 1^ère^ espèce.

Étudions maintenant les périodes et prenons d'abord celles qui se rapportent à une substitution linéaire elliptique

$$\left(z,\ \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right).$$

Écrivons cette substitution sous la forme:

$$\left(\frac{\lambda z+\mu}{\varrho z+\sigma},\ j^2\frac{\lambda z+\mu}{\varrho z+\sigma}\right),$$

j étant une racine $2k^e$ de l'unité.

Posons

$$H(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta)=M(\xi,\eta);\ Q(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta)=P(\xi,\eta).$$

L'équation

$$M(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)=M(\xi,\eta)+P(\xi,\eta)$$

pourra s'écrire

$$H(j\lambda\xi+j\mu\eta,\ j^{-1}\varrho\xi+j^{-1}\sigma\eta)=H(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta)+Q(\lambda\xi+\mu\eta,\ \varrho\xi+\sigma\eta).$$

On a donc

$$H(j\xi,j^{-1}\eta)=H(\xi,\eta)+Q(\xi,\eta).$$

De cette équation, nous pouvons en déduire plusieurs autres en changeant ξ en $j\xi, j^2\xi, \dots j^{k-1}\xi$; et η en $j^{-1}\eta, j^{-2}\eta, \dots j^{1-k}\eta$

$$\begin{aligned} H(j^2\xi,j^{-2}\eta)&=H(j\xi,j^{-1}\eta)+Q(j\xi,j^{-1}\eta),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ H(j^k\xi,j^{-k}\eta)&=H(j^{k-1}\xi,j^{1-k}\eta)+Q(j^{k-1}\xi,j^{1-k}\eta).\end{aligned}$$

Mais comme j est une racine $2k^e$ de l'unité, on a

$$H(j^k\xi,j^{-k}\eta)=H(\pm\xi,\pm\eta)=H(\xi,\eta)$$

et par conséquent

$$Q(\xi,\eta)+Q(j\xi,j^{-1}\eta)+\dots+Q(j^{k-1}\xi,j^{1-k}\eta)=0$$

ce qui signifie que dans le polynôme Q tous les termes où la différence des exposants de ξ et de η est nulle ou un multiple de $2k$ doivent être nuls.

Le nombre des coëfficients distincts du polynôme Q (ou ce qui revient au même du polynôme P), est égal à 2ω, ω étant le plus petit nombre entier satisfaisant à l'inégalité

$$\omega \geqq h\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Dans le cas des fonctions modulaires nous n'aurons à envisager que deux polynômes P, le 1^er^ correspondant à la substitution $\left(z, -\frac{1}{z}\right)$ pour laquelle $k=2$, et le 2^d^ à la substitution $\left(z, \frac{z-1}{z}\right)$ pour laquelle on a $k=3$. Pour le 1^er^ ω sera égal au nombre λ du tableau (2.); pour le 2^d^ au nombre λ_1, de ce même tableau, de sorte que le nombre des coëfficients arbitraires serait

$$2\lambda+2\lambda_1.$$

Mais nous pouvons ajouter à l'intégrale $M(z)$ un polynôme entier quelconque en z d'ordre $2h$, sans que sa dérivée d'ordre $2h+1$ cesse d'être égale à $\Theta(z)$. Ce polynôme contient $2h+1$ coëfficients arbitraires. Nous pourrons donc ajouter à $M(z)$ un polynôme choisi de façon à annuler $2h+1$ des coëfficients arbitraires des périodes. Pour qu'il en fût autrement, il faudrait qu'il existât un polynôme entier en z dont toutes les périodes fussent nulles, c'est-à-dire qui fût égal à une fonction $\Delta(z)$. Or il n'y en a pas (sauf le cas de $h=0$, que nous excluons).

Ce n'est pas tout; soient $P(\xi,\eta)$, $Q(\xi,\eta)$ les périodes relatives aux deux substitutions elliptiques envisagées plus haut, de sorte que

$$M(-\eta,\xi)=M(\xi,\eta)+P(\xi,\eta),$$
$$M(\xi-\eta,\xi)=M(\xi,\eta)+Q(\xi,\eta).$$

Si nous faisons $\xi=0$, il vient

$$M(-\eta,0)=M(0,\eta)+P(0,\eta),$$
$$M(-\eta,0)=M(0,\eta)+Q(0,\eta)$$

d'où enfin

$$P(0,\eta)=Q(0,\eta).$$

Cette condition étant distincte des précédentes, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, il nous reste

$$2\lambda+2\lambda_1-(2h+1)-1=2p-2$$

coëfficients arbitraires.

Le nombre des coëfficients arbitraires est donc au plus $2p-2$.

Il ne peut pas non plus être inférieur. Car s'il l'était, on ne pourrait trouver $2p-2$ intégrales de 1ère et de 2de espèce linéairement indépendantes. Car si nous prenons $2p-2$ intégrales $M(z)$ quelconques, nous pourrions en former une combinaison linéaire et choisir les coëfficients de cette combinaison de telle sorte que toutes ses périodes soient nulles, c'est-à-dire qu'elle se réduise à une fonction $\varDelta(z)$.

Or nous savons qu'il existe précisément $2p-2$ intégrales indépendantes de 1ère et de 2de espèce.

Donc en résumé:

Le nombre des coëfficients arbitraires des périodes est double de celui des intégrales de 1ère espèce.

Ce théorème est d'ailleurs général.

On peut trouver d'autres analogies avec la théorie des intégrales abéliennes, ainsi la possibilité de décomposer en intégrales simples de 2e espèce les fonctions $\varDelta(z)$ qui jouent ici le rôle des fonctions rationnelles $R(x, y)$ dans l'étude des intégrales abéliennes. D'autre part, les relations entre les résidus des fonctions $\varDelta(z)$ correspondent au théorème de *Riemann-Roch.*

Enfin $\Phi(z, a)$ est une intégrale de 2e espèce par rapport à z, et c'est en même temps une fonction thétafuchsienne de a; il y a là une sorte de réciprocité qui n'est pas sans analogie avec la Vertauschung von Parameter und Argument de *Clebsch* et *Gordan.*

Mais revenons au problème qui nous avait servi de point de départ. Il s'agissait de ramener les fonctions thétafuchsiennes à la forme de séries thétafuchsiennes, ou si l'on préfère, de chercher la condition nécessaire et suffisante de l'identité de deux expressions thétafuchsiennes, mises soit sous la forme de séries thétafuchsiennes, soit sous la forme des séries (1.) et (4.) du paragraphe précédent, soit sous la forme du produit de $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1}$ par une fonction rationnelle de x et de y.

Nous pouvons maintenant énoncer ces conditions. Il faut et il suffit:

1° Que les infinis soient les mêmes avec les mêmes résidus.

2° Que les périodes soient les mêmes.

Encore ces conditions ne sont-elles pas distinctes; il suffit que $p-1$ des coëfficients arbitraires des périodes (sur $2p-2$) soient les mêmes.

§ 4. *Invariants des Formes Quadratiques Définies.*

Après avoir envisagé les invariants arithmétiques d'une forme linéaire isolée, nous sommes conduits à étudier ceux de deux formes linéaires simultanées, d'où il est aisé de déduire ceux d'une forme quadratique.

Soient $ax+by$ et $a'x+b'y$ deux formes linéaires simultanées, nous cherchons les fonctions des 4 coëfficients a, b, a', b' qui demeurent inaltérées quand les deux formes subissent une *même* substitution linéaire à coëfficients entiers.

Si $j_1, j_2, \dots j_p$ sont des invariants de la forme $ax+by$ regardée comme isolée, si $j'_1, j'_2 \dots j'_q$ sont des invariants de la forme isolée $a'x+b'y$, il est clair d'abord que toute fonction uniforme des j et des j' est un invariant des deux formes simultanées.

Mais tous les invariants de ces deux formes ne peuvent pas s'obtenir ainsi; ceux qu'on peut définir de la sorte, ne sont pas altérés, non seulement quand les deux formes subissent une *même* substitution, mais encore quand elles subissent deux substitutions *différentes.* Ce ne sont donc que des invariants très particuliers et qui ne présentent pas d'intérêt spécial, puisqu'ils se ramènent immédiatement à ceux que nous venons d'étudier.

Il est aisé d'en obtenir d'autres; soient:

$$F_1=(ax+by)+\xi_1(a'x+b'y),\ F_2=(ax+by)+\xi_2(a'x+b'y), \dots$$
$$F_p=(ax+by)+\xi_p(a'x+b'y)$$

p combinaisons linéaires de nos deux formes; les lettres $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p$ représentent p coëfficients constants quelconques. Soit j_1 un invariant de F_1, j_2 un invariant de $F_2, \dots j_p$ un invariant de F_p. Toute fonction uniforme de $j_1, j_2, \dots j_p$ sera encore un invariant de nos deux formes.

Considérons maintenant la forme quadratique

$$(ax+by)(a'x+b'y)=aa'x^2+(ab'+ba')xy+bb'y^2$$

qui est le produit de nos deux formes linéaires. Toute fonction de aa', $ab'+ba'$, bb' qui sera un invariant arithmétique de nos deux formes linéaires, sera un invariant de la forme quadratique; et la réciproque est d'ailleurs vraie.

D'après ce que nous avons dit des invariants des formes linéaires, nous sommes conduits à envisager spécialement les invariants des deux formes linéaires qui dépendent seulement des rapports

$$\frac{a}{b} = z, \quad \frac{a'}{b'} = z'$$

c'est-à-dire les fonctions $F(z, z')$ telles que

$$(1.) \qquad F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}\right) = F(z, z').$$

C'est ainsi que parmi les invariants d'une seule forme linéaire, nous avons distingué les fonctions fuchsiennes $F(z)$, tandis que les autres se ramènent aux fonctions thétafuchsiennes.

Parmi les fonctions $F(z, z')$ qui jouissent de la propriété précédente, celles qui sont symétriques en z et z' sont des invariants de la forme quadratique.

Si nous considérons les différentes substitutions linéaires à coëfficients entiers, nous considérerons que pour une infinité d'entre elles, les deux nombres

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}$$

sont infiniment près d'être réels; ce qui nous montre d'abord que les points pours lesquels z et z' sont réels tous deux, seront des points singuliers de la fonction $F(z, z')$. Mais d'autre part, si z et z' sont deux nombres qui ne sont pas tous deux réels, il sera impossible de trouver une infinité de substitutions telles que les deux équations

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}$$

soient infiniment près d'être simultanément satisfaites.

On pourrait donc être tenté de croire qu'il est possible de former des fonctions $F(z, z')$ (ou plus généralement des invariants arithmétiques des deux formes simultanées $ax + by$ et $a'x + b'y$) qui n'admettent d'autres points singuliers que ceux pour lesquels z et z' sont réels tous deux. Cela n'est pas possible; supposons en effet que z et z' soient liés par la relation

$$(2.) \qquad zz' + i(z - z') + 1 = 0;$$

alors $F(z, z') = F\left(z, \frac{-1 - iz}{z - i}\right)$ sera fonction uniforme de z seulement et comme z et z' en vertu de la relation (2.) ne peuvent être réels à la fois, la fonction $F(z, z')$ n'aurait aucun point singulier essentiel, ce qui est impossible.

Nous avons bien des manières de former des invariants arithmétiques; considérons par exemple la série

$$(3.)\qquad \Sigma H\Big(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ \frac{\alpha z'+\beta}{\gamma z'+\delta}\Big)(\gamma z+\delta)^{-2m}(\gamma z'+\delta)^{-2m}$$

analogue aux séries thétafuchsiennes et où la sommation est étendue à toutes les substitutions linéares du groupe.

Cette série où $H(z, z')$ représente une fonction rationnelle de z et de z' converge pourvu que:

1⁰ Le nombre m soit entier et positif.

2⁰ La fonction $H(z, z')$ ne puisse devenir infinie ou indéterminée quand z et z' sont tous deux réels.

3⁰ Le produit $H(z, z')\, z^m z'^m$ tende vers une limite finie et déterminée quand z et z' croissent indéfiniment.

Posons alors

$$b^{-2m}\, b'^{-2m}\, H\Big(\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'}\Big) = H(a, b, a', b');$$

la série (3.) pourra s'écrire

$$(3^{\text{bis}}.)\quad \Sigma H(\alpha a+\beta b,\ \gamma a+\delta b,\ \alpha a'+\beta b',\ \gamma a'+\delta b') = \Theta(a, b, a', b')$$

et se présentera directement sous la forme d'un invariant des deux formes linéaires. Si la fonction $H(z, z')$ est symétrique en z et z', ce sera un invariant de la forme quadratique. Si l'on donne à la série la forme (3^{bis}.) la condition de convergence est que H soit une fonction rationnelle homogène de degré $-2m$ tant par rapport à a et à b que par rapport à a' et b' et dont le dénominateur ne puisse s'annuler quand les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ prennent une même valeur réelle.

Nous obtiendrons évidemment une autre forme d'invariants en envisageant les séries

$$(4.)\qquad \Sigma \frac{1}{(\gamma a+\delta b)^s(\gamma a'+\delta b')^s}$$

où γ et δ peuvent prendre tous les systèmes de valeurs entières possibles sauf le système $\gamma=\delta=0$, et où nous supposerons d'abord s entier (et d'ailleurs >1). Les invariants définis par les séries (3^{bis}.) ou (4.) admettent comme points singuliers essentiels, non-seulement ceux où z et z'

sont réels *tous deux*, mais ceux où *l'une* seulement de ces deux quantités est réelle. Ils n'en admettent d'ailleurs pas d'autre.

Soient maintenant λ et μ, λ' et μ' quatre constantes quelconques, et reprenant la fonction Θ définie par l'équation (3^{bis}.), formons l'expression

$$(3^{\text{ter}}) \qquad \Theta(\lambda a+\mu a', \ \lambda b+\mu b', \ \lambda' a+\mu' a', \ \lambda' b+\mu' b')$$

ce sera un invariant arithmétique des deux formes linéaires, mais non plus de la forme quadratique, ses points singuliers seront ceux pour lesquels l'un des deux rapports

$$\frac{\lambda a+\mu a'}{\lambda b+\mu b'}, \quad \frac{\lambda' a+\mu' a'}{\lambda' b+\mu' b'}$$

sera réel. Plus généralement soit $H(a, b, a', b')$ une fonction rationnelle quelconque homogène de degré $-4m$ par rapport aux 4 variables a, b, a', b'. Formons la série

$$(5.) \quad \Sigma H(\alpha a+\beta b, \ \gamma a+\delta b, \ \alpha a'+\beta b', \ \gamma a'+\delta b') = \Theta_1(a, b, a', b').$$

Si cette série est convergente, Θ_1 sera encore un invariant des deux formes linéaires. Soit $Q(a, b, a', b')$ le dénominateur de H; l'ensemble des points où l'un des termes de la série devient infini sera donné par les équations

$$(6.) \qquad Q(\alpha a+\beta b, \ \gamma a+\delta b, \ \alpha a'+\beta b', \ \gamma a'+\delta b') = 0.$$

Mais ce dont nous devons surtout nous préoccuper, c'est de rechercher l'ensemble des points dans le voisinage desquels il y a une infinité d'équations (6.) qui sont satisfaites. Ces points seront en effet les points singuliers essentiels de la fonction Θ_1.

Soit d'abord z_0 une quantité commensurable quelconque. Posons

$$\alpha = 1+hz_0, \quad \beta = -hz_0^2, \quad \gamma = h, \quad \delta = 1-hz_0$$

d'où $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$; comme z_0 est commensurable on peut choisir h d'une infinité de manières de façon que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient entiers, et on aura

$$\alpha a+\beta b = a+hz_0(a-z_0 b), \qquad \gamma a+\delta b = b+h(a-z_0 b),$$
$$\alpha a'+\beta b' = a'+hz_0(a'-z_0 b'), \qquad \gamma a'+\delta b' = b'+h(a'-z_0 b')$$

de sorte que quand h croîtra indéfiniment, les rapports des quantités

$$\alpha a+\beta b, \quad \gamma a+\delta b, \quad \alpha a'+\beta b', \quad \gamma a'+\delta b'$$

tendront vers ceux des quantités

$$z_0(a - z_0 b), \quad (a - z_0 b), \quad z_0(a' - z_0 b'), \quad (a' - z_0 b').$$

Si donc le point a, b, a', b' satisfait à l'équation

$$(7.) \qquad Q[z_0(a - z_0 b), (a - z_0 b), z_0(a' - z_0 b'), (a' - z_0 b')] = 0,$$

il y aura dans le voisinage de ce point une infinité d'autres points où des équations de la forme (6.), différentes pour tous ces points, seront satisfaites. Et cela sera vrai quand on donnera à z_0 une valeur commensurable et par conséquent aussi une valeur réelle quelconque.

Mais ce n'est pas tout; il est évident que si le point a, b, a', b' est un point singulier essentiel, il en sera de même de tous les points

$$\alpha a + \beta b, \quad \gamma a + \delta b, \quad \alpha a' + \beta b', \quad \gamma a' + \delta b'$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Donc les points a, b, a', b' qui satisferont à l'équation

$$Q(z_0 A, A, z_0 A', A') = 0$$

en posant

$$A = (\alpha a + \beta b) - z_0(\gamma a + \delta b), \quad A' = (\alpha a' + \beta b') - z_0(\gamma a' + \delta b')$$

seront encore des points singuliers essentiels. Or quand z_0 prend toutes les valeurs réelles possibles,

$$z_0' = \frac{\beta - z_0 \delta}{\alpha - z_0 \gamma}$$

prend aussi toutes les valeurs réelles possibles. Nous obtiendrons donc finalement les points singuliers essentiels à l'aide de l'équation

$$(7^{\text{bis}}.) \qquad Q[z_0(a - z_0' b), (a - z_0' b), z_0(a' - z_0' b'), (a' - z_0' b')] = 0$$

où z_0 et z_0' sont deux constantes réelles quelconques.

Réciproquement, si l'on considère une suite indéfinie de systèmes de nombres entiers, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, on voit que quand on s'avancera indéfiniment dans cette suite, les différences

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}, \quad \frac{\alpha a + \beta b}{\gamma a + \delta b} - \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\alpha a' + \beta b'}{\gamma a' + \delta b'} - \frac{\alpha}{\gamma}$$

tendent vers zéro (j'exclus le cas où δ reste fini, cas où il conviendrait de renverser tous les rapports précédents). On déduit de là que si le point a_1, b_1, a'_1, b'_1 est infiniment voisin d'une infinité de transformés du point a, b, a', b' on devra avoir:

$$\frac{a_1}{z_0(a-z'_0 b)} = \frac{b_1}{a-z'_0 b} = \frac{a'_1}{z_0(a'-z'_0 b')} = \frac{b'_1}{a'-z'_0 b'},$$

z_0 et z'_0 étant réels.

On peut en conclure ensuite que si le point a, b, a', b' ne satisfait ni aux équations (6.), ni à l'équation (7^{bis}.), on peut trouver une limite supérieure de

$$H(a, b, a', b')\, b^{2m}\, b'^{2m} = H_1(a, b, a', b')$$

(qui est une fonction rationnelle homogène de degré zéro en a, b, a', b') ainsi que de toutes ses transformées:

$$H_1(\alpha a+\beta b,\ \gamma a+\delta b,\ \alpha a'+\beta b',\ \gamma a'+\delta b').$$

D'où il suit que la série (5.) converge puisque la série

$$(8.) \qquad \Sigma(\gamma a+\delta b)^{-2m}(\gamma a'+\delta b')^{-2m}$$

est convergente. A vrai dire ce raisonnement semble supposer en outre que les rapports $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ ne sont pas réels, puisque dans le cas contraire la série (8.) ne convergerait pas, mais il serait aisé de remplacer dans l'expression de H_1 le facteur $b^{2m}\, b'^{2m}$ par

$$(\lambda b+\mu b')^{2m}(\lambda' b+\mu' b')^{2m}$$

et de choisir les constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ de telle façon que les rapports

$$\frac{\lambda a+\mu a'}{\lambda b+\mu b'},\ \frac{\lambda' a+\mu' a'}{\lambda' b+\mu' b'}$$

ne soient pas réels et par conséquent que la série

$$(8^{\text{bis}}.) \quad \Sigma[\lambda(\gamma a+\delta b)+\mu(\gamma a'+\delta b')]^{-2m}[\lambda'(\gamma a+\delta b)+\mu'(\gamma a'+\delta b')]^{-2m}$$

converge.

La nature des points singuliers résulte de la discussion qui précède. Considérons l'espace à 8 dimensions où les coordonnées sont les parties réelle et imaginaire de a, b, a' et b'. Dans cet espace les points satisfaisant à une équation (6.) forment une variété à 6 dimensions, les points satisfaisant à une équation (7^{bis}.) où z_0 et z'_0 sont réels, formeront en général une variété à 8 dimensions. *Donc en général les points singuliers essentiels formeront des espaces lacunaires.*

Cependant il peut se faire que le 1er membre de (7^{bis}.) puisse se mettre sous la forme:

$$Q'(z_0)\, Q''(a - z'_0 b,\ a' - z'_0 b') = 0.$$

Dans ce cas l'équation (7^{bis}.) peut se réduire à

$$Q''(a - z'_0 b,\ a' - z'_0 b') = 0$$

et ne contient plus qu'un paramètre arbitraire réel z'_0. Dans ce cas, les points qui y satisfont forment une variété à 7 dimensions; de sorte que si l'on regarde par exemple b, a', b' comme donnés, les points singuliers essentiels dans le plan des a forment des lignes singulières et non des espaces lacunaires.

Dans le cas par exemple des invariants de la forme quadratique, H et par conséquent Q sont homogènes de même degré en a et b d'une part, en a' et b' d'autre part (de degré k par exemple); le 1er membre de (7^{bis}.) se réduit alors à

$$Q(z_0, 1, z_0, 1)\,(a - z'_0 b)^k\,(a' - z'_0 b')^k$$

et l'équation (7^{bis}.) s'écrit

$$(a - z'_0 b)^k\,(a' - z'_0 b')^k = 0$$

ce qui montre que les points singuliers essentiels correspondent aux cas où $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a'}{b'}$ sont réels. Dans le cas où l'on a $Q(z_0, 1, z_0, 1) = 0$, z_0 étant réel, c'est-à-dire si le dénominateur de H s'annule quand les deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ prennent une même valeur réelle, l'équation (7^{bis}.) est toujours satisfaite, de sorte que la série ne converge jamais.

On est donc conduit à partager l'espace en 4 régions d'après le signe de la partie imaginaire de $\frac{a}{b}$ et de $\frac{a'}{b'}$. La série (3^{bis}.) représente des fonctions différentes dans ces 4 régions; observons que de ces 4 régions la plus intéressante est celle où l'une des parties imaginaires est positive et l'autre négative; quand en effet, les deux rapports sont imaginaires conjugués, la forme quadratique devient réelle et définie. Ce que nous venons de dire s'applique à la série (3^{bis}.); on obtient des résultats analogues pour la série (3^{ter}.).

Soient $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ quatre séries de la forme (3^{bis}.) le nombre m étant le même pour toutes les quatre. Existe-t-il en général entre elles une relation algébrique homogène

$$F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) = 0 \; ? \tag{9.}$$

Ce serait là une généralisation d'un théorème connu sur les séries thétafuchsiennes. Mais désignons par H_1, H_2, H_3, H_4 les fonctions rationnelles qui engendrent respectivement $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ et supposons que l'on ait

$$H_1 = \frac{H'_1}{(a-q_1 b)(a'-q_1 b')}, \quad H_2 = \frac{H'_2}{(a-q_2 b)(a'-q_2 b')}$$

où q_1 et q_2 sont des constantes, où H'_1, H'_2 sont des fonctions rationnelles qui ne deviennent ni nulles, ni infinies pour $\frac{a}{b} = q_1$, $\frac{a'}{b'} = q_2$, tandis que H_3 et H_4 sont d'ailleurs quelconques; nous supposerons seulement qu'elles ne deviennent ni nulles, ni infinies pour $\frac{a}{b} = q_1$, $\frac{a'}{b'} = q_2$.

Ordonnons la relation (9.) suivant les puissances de Θ_1 et Θ_2 et soit

$$A_{\mu\nu}\, \Theta_1^{\mu}\, \Theta_2^{\nu}$$

l'un des termes du développement, $A_{\mu\nu}$ étant un polynôme homogène en Θ_3 et Θ_4. Je distinguerai parmi ces termes ceux qui seront *d'ordre maximum.* Un terme en $\Theta_1^{\mu}\Theta_2^{\nu}$ sera d'ordre maximum s'il n'existe pas de terme en $\Theta_1^{\mu'}\Theta_2^{\nu'}$ tel que $\mu' > \mu$, $\nu' \geqq \nu$, ou $\mu' \geqq \mu$, $\nu' > \nu$.

Soit

$$q'_1 = \frac{\alpha q_1 + \beta}{\gamma q_1 + \delta}, \qquad q'_2 = \frac{\alpha' q_2 + \beta'}{\gamma' q_2 + \delta'}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$, mais qui correspondent à deux substitutions linéaires différentes.

Alors Θ_1 et Θ_2 deviennent infinis pour

$$\frac{a}{b} = q'_1, \qquad \frac{a'}{b'} = q'_2$$

et si l'on développe

$$\Theta_1\, b^{2m} b'^{2m}, \quad \Theta_2\, b^{2m} b'^{2m}$$

qui ne dépendent que des rapports $\frac{a}{b} = z$, $\frac{a'}{b'} = z'$, si l'on les développe, dis-je, suivant les puissances de $z - q'_1$ et $z' - q'_2$, on trouve

$$\Theta_1\, b^{2m} b'^{2m} = \frac{B_1}{z - q'_1} + V_1, \qquad \Theta_2\, b^{2m} b'^{2m} = \frac{B_2}{z' - q'_2} + V_2.$$

V_1 et V_2 ne devenant pas infinis et B_1 et B_2 représentant des constantes analogues aux résidus.

Si nous développons de même

$$F(\Theta_1\, b^{2m} b'^{2m},\ \Theta_2\, b^{2m} b'^{2m},\ \Theta_3\, b^{2m} b'^{2m},\ \Theta_4\, b^{2m} b'^{2m})$$

suivant les puissances de $z-q_1'$, $z'-q_2'$, tous les termes du développement devront être nuls. Or si $A_{\mu\nu}\,\Theta_1^{\mu}\,\Theta_2^{\nu}$ est un terme d'ordre maximum, le coëfficient de

$$\frac{1}{(z-q_1')^{\mu}\,(z'-q_2')^{\nu}}$$

sera $A_{\mu\nu}^0$, en désignant par $A_{\mu\nu}^0$ ce que devient $A_{\mu\nu}$ quand on y fait

$$a=q_1',\ b=1,\quad a'=q_2',\ b'=1.$$

Donc $A_{\mu\nu}^0$ doit être nul; donc le rapport $\frac{\Theta_3}{\Theta_4}$ doit être le même quand on y fait

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha q_1+\beta}{\gamma q_1+\delta},\qquad \frac{a'}{b'}=\frac{\alpha' q_2+\beta'}{\gamma' q_2+\delta'}$$

quels que soient les entiers $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ \alpha',\beta',\gamma',\delta'$. Et comme q_1 et q_2 sont quelconques, le rapport $\frac{\Theta_3}{\Theta_4}$ ne doit pas changer quand a, b et a', b' subissent des substitutions linéaires à coëfficients entiers, *que ces substitutions soient identiques ou différentes.*

Comme il n'en est pas ainsi, c'est que la relation (9.) ne peut exister et *qu'il n'y a pas en général de relation algébrique entre les Θ.*

A l'aide des invariants obtenus par les séries (3^{bis}.), on peut en obtenir d'autres en les combinant par addition, soustraction, multiplication et division. On peut également les combiner avec la fonction

$$ab'-a'b$$

qui est évidemment un invariant des deux formes linéaires et la racine carrée d'un invariant de la forme quadratique.

D'autre part, si J est un invariant des deux formes linéaires, il en est de même des expressions

$$a'\frac{dJ}{da}+b'\frac{dJ}{db},\qquad a\frac{dJ}{da'}+b\frac{dJ}{db'}.$$

Dans le cas particulier où

$$H(z) = \frac{1}{(z-q)(z'-q)},$$

l'invariant Θ formé à l'aide de la série (3^{bis}.) satisfait à une équation différentielle remarquable, car

$$a'\frac{d\Theta}{da} + b'\frac{d\Theta}{db}$$

est un des invariants de la forme linéaire unique $ax+by$, invariants étudiés dans le § 2. Plus généralement si

$$H(z) = \frac{1}{(z-q)^m (z'-q)^m}$$

la même opération répétée m fois sur Θ conduit à un invariant de la forme linéaire unique $ax+by$.

Il est clair que si l'invariant J est homogène d'ordre m en a et b et d'ordre m' en a' et b', l'invariant $a'\frac{dJ}{da} + b'\frac{dJ}{db}$ sera homogène d'ordre $m-1$ en a et b et d'ordre $m'+1$ en a' et b'.

Soit maintenant $\varDelta$ un invariant homogène d'ordre m en a et b et d'ordre m' en a' et b', m et m' étant positifs. Alors les dérivées d'ordre m par rapport à a et à b seront homogènes d'ordre 0, de sorte qu'en vertu du théorème des fonctions homogènes, on pourra poser

$$\frac{d^{m+1}\varDelta}{da^p\, db^{1+m-p}} = (-1)^{1+m-p}\, b^p a^{1+m-p} M(a, b, a', b')$$

et on constate aisément que M est encore un invariant arithmétique homogène d'ordre $-(m+2)$ en a et b et d'ordre m' en a' et b'. On posera de même

$$\frac{d^{m'+1} M}{da'^p\, db'^{1+m'-p}} = (-1)^{1+m'-p}\, b'^p a'^{1+m-p} N(a, b, a', b')$$

et on verrait que N est un invariant arithmétique homogène d'ordre $-(m+2)$ en a et b et d'ordre $-(m'+2)$ en a' et b'. Cela est l'équivalent de la relation entre les fonctions $\varDelta$ envisagées au § 3 et les fonctions thétafuchsiennes. On voit de combien de manières on peut déduire de nouveaux invariants de ceux que l'on connaît déjà.

On peut rattacher ces invariants à certaines fonctions qui sont apparentées aux fonctions elliptiques. Considérons en effet la série double

$$\Sigma H(x - ma - nb,\quad x' - ma' - nb') = F_{pq}(x, x')$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières possibles, et où H peut s'écrire:

$$H = \frac{1}{x^p x'^q},$$

p et q étant deux entiers positifs dont la somme est plus grande que 2. Si nous supposons d'abord $q = 1$, nous voyons que la fonction F_{p1} satisfait à l'équation différentielle:

$$x' \frac{dF_{p1}}{dx} + a' \frac{dF_{p1}}{da} + b' \frac{dF_{p1}}{db} = \Sigma \frac{-p}{(x - ma - nb)^{p+1}}$$

dont le second membre est une fonction elliptique, et si q est > 1, on a simplement:

$$\frac{dF_{p,q-1}}{dx'} = (1 - q) F_{pq} \; .$$

La différence

$$F_{pq}(x, x') - \frac{1}{x^p x'^q}$$

se réduit pour $x = x' = 0$ à l'un de nos invariants.

Observons encore que le produit

$$F_{pq}(x, x') \, \sigma^p(x, a, b) \, \sigma^q(x', a', b')$$

où $\sigma(x, a, b)$ représente la fonction σ de *Weierstrass* ayant pour périodes a et b, que ce produit, dis-je, reste fini pour toutes les valeurs des variables, (sauf bien entendu quand l'un des rapports $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a'}{b'}$ devient réel). Si l'on développe ce produit suivant les puissances de x et de x', les coëfficients du développement seront encore des invariants qui ne deviendront pas infinis.

Il résulte de cette rapide revue que les invariants des formes quadratiques présentent beaucoup plus de variété que ceux des formes linéaires, et cette variété se manifeste en particulier par la circonstance suivante. Dans la série (1.) du § 2, on ne pouvait donner à k une valeur fractionnaire; dans la série (4.) de ce § 4 au contraire, nous pouvons donner à s une valeur fractionnaire, au moins quand les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont imaginaires conjugués; la somme de la série reste un invariant. Cette circonstance a joué un rôle capital dans la démonstration de *Lejeune-Dirichlet* qui nous a servi de point de départ.

§ 5. *Relations avec les Fonctions Abéliennes.*

Les invariants des formes quadratiques présentent comme nous venons de le voir une grande variété; au lieu de l'invariant

$$J(s) = \Sigma \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

qui joue le rôle capital dans la démonstration de *Lejeune-Dirichlet* et qui correspond à la série (4.) du paragraphe précédent, on peut envisager la série

$$\Sigma \varphi(am^2 + 2bmn + cn^2)$$

où φ est une fonction quelconque, et en particulier:

$$F(q) = \Sigma q^{am^2+2bmn+cn^2}.$$

C'est d'ailleurs ce qu'a fait *Lejeune-Dirichlet* lui-même (cf. Œuvres Complètes tome 1, page 467 à 469) et comme nous allons bientôt nous en rendre compte, cet invariant $F(q)$ aurait pu, tout aussi bien que $J(s)$ servir de point de départ à son analyse.

On voit d'ailleurs que ces deux invariants sont intimement liés l'un à l'autre; car on a la formule

$$(1.) \qquad \Gamma(s)\, J(s) = \int_0^\infty z^{s-1}[F(e^{-z}) - 1]\, dz.$$

D'un autre côté, $F(q)$ se rattache aux fonctions abéliennes, car la série

$$(2.) \qquad \Theta = \Sigma e^{i(mx+ny)} q^{am^2+2bmn+cn^2}$$

n'est autre chose que la célèbre fonction Θ, et il suffit pour retrouver $F(q)$ d'y faire $x = y = 0$.

Nous avons besoin pour ce qui va suivre de savoir comment se comporte cette fonction pour q voisin de 1, et pour cela nous emploierons l'artifice suivant. La fonction Θ elliptique peut recevoir l'interprétation physique suivante. Soit une armille de longueur 2π, soit $f(x)$ la distribution de la température dans cette armille à l'instant $t = 0$, x désignant l'arc compté sur l'armille à partir d'une certaine origine. Si l'on choisit convenablement les unités et si l'on prend $q = e^{-t}$, la distribution de la température à un instant quelconque sera représentée par l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{2\pi} \Theta(x - z)\, dz.$$

Généralisons cette conception. Nous voyons d'abord que si nous posons $q = e^{-t}$, la série (2.) satisfait à l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{d\Theta}{dt} = a\frac{d^2\Theta}{dx^2} + 2b\frac{d^2\Theta}{dx\,dy} + c\frac{d^2\Theta}{dy^2}. \tag{3.}$$

Elle représente donc la distribution de la température dans un plan formé d'une matière anisotrope c'est-à-dire où la conductibilité calorifique varie avec la direction. De plus cette distribution doit être périodique, car la fonction Θ ne change pas quand on augmente x ou y d'un multiple de 2π. Il est clair d'ailleurs que si cette periodicité existe à l'instant initial, elle subsistera toujours. De même, dans le cas de la fonction Θ elliptique, au lieu de considérer une armille fermée, nous aurions pu envisager une droite indéfinie, mais où la distribution initiale serait supposée périodique.

Revenons à la fonction Θ abélienne et cherchons quelle doit être la distribution initiale dans le plan. Soit d'une façon plus générale

$$f(x, y) = \Sigma A_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

la distribution initiale; la distribution à un instant quelconque sera

$$f(x, y, t) = \Sigma A_{mn} e^{i(mx+ny)} q^{am^2+2bmn+cn^2}.$$

Or on a

$$A_{mn} = \frac{1}{4\pi^2}\int\int f(u, v)\, e^{-i(mu+nv)}\, du\, dv$$

les intégrations étant effectuées de $u = 0$ à $u = 2\pi$ et de $v = 0$ à $v = 2\pi$. On a donc

$$f(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2}\int\int f(u, v)\,\Theta(x-u, y-v)\,du\,dv.$$

Pour passer à la fonction Θ elle-même, il suffit de supposer que la fonction $f(u, v)$ est nulle sauf quand u et v sont nuls ou multiples de 2π, auquel cas elle est infinie.

Si l'on me permet de parler de quantité de chaleur au lieu de température afin d'énoncer le résultat plus facilement, je dirai:

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, il y ait une quantité de chaleur $4\pi^2$ concentrée à l'origine, ainsi qu'en chacun des points $x = 2k\pi$, $y = 2k'\pi$, la distribution de cette chaleur dans le plan à un instant ultérieur sera représentée par la fonction Θ.

Étudions cette distribution par une autre voie. Envisageons l'équation

$$\Theta = \iint e^{-u^2-v^2}\varphi(\xi,\eta)\,du\,dv \tag{4.}$$

où l'intégration double est étendue au plan des uv tout entier et où l'on a posé:

$$\xi = x+\alpha u\sqrt{2t}+\beta v\sqrt{2t}, \qquad \eta = y+\gamma u\sqrt{2t}+\delta v\sqrt{2t}.$$

Il vient:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \iint e^{-u^2-v^2}\frac{du\,dv}{\sqrt{2t}}\left[u\left(\alpha\frac{d\varphi}{d\xi}+\gamma\frac{d\varphi}{d\eta}\right)+v\left(\beta\frac{d\varphi}{d\xi}+\delta\frac{d\varphi}{d\eta}\right)\right],$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \iint e^{-u^2-v^2}\frac{du\,dv}{2t}\left(u\frac{d\varphi}{du}+v\frac{d\varphi}{dv}\right) = \iint e^{-u^2-v^2}\frac{du\,dv}{4t}\left(\frac{d^2\varphi}{du^2}+\frac{d^2\varphi}{dv^2}\right).$$

Donc si nous choisissons les constantes $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ de telle façon que l'on ait identiquement

$$(\alpha x+\gamma y)^2+(\beta x+\delta y)^2 = 2(ax^2+2bxy+cy^2)$$

la fonction Θ définie par l'équation (4.) satisfera à l'équation (3.); on aura d'ailleurs pour $t=0$

$$\Theta = \varphi(x,y)\iint e^{-u^2-v^2}du\,dv = \pi\varphi(x,y)$$

c'est donc $\pi\varphi(x,y)$ qui représente la distribution initiale.

Soit $\alpha\delta-\beta\gamma = E$, d'où $b^2-ac = -\frac{1}{4}E^2$, il viendra

$$u^2+v^2 = \frac{1}{E^2 t}\left[a(y-\eta)^2-2b(x-\xi)(y-\eta)+c(x-\xi)^2\right] = P$$

et l'équation (4.) deviendra

$$\Theta = \iint e^{-P}\varphi(\xi,\eta)\frac{d\xi\,d\eta}{2Et}. \tag{4bis.}$$

Maintenant, pour notre distribution initiale particulière, toute la chaleur doit être concentrée aux points

$$x = 2k\pi, \qquad y = 2k'\pi,$$

de sorte que $\varphi(\xi,\eta)$ est nulle partout, sauf en ces points où elle est infinie, la quantité de chaleur concentrée en chacun de ces points et représentée par l'intégrale $\pi \int\int \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$, devra être $4\pi^2$. Notre intégrale doit donc être remplacée par la série

$$\Theta = \Sigma \frac{2\pi}{Et} e^{-P} \tag{5.}$$

où

$$P = \frac{1}{E^2 t} [a(y-2k'\pi)^2 - 2b(y-2k'\pi)(x-2k\pi) + c(x-2k\pi)^2]$$

et où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs entières de k et de k'.

Si nous faisons $x = y = 0$, nous voyons que pour t très grand, les exponentielles e^{-P} sont très petites, excepté celle qui correspond à $k = k' = 0$ et qui se réduit à 1. On aura donc sensiblement

$$F(q) = \frac{2\pi}{Et}. \tag{5$^{\text{bis}}$.}$$

Ainsi *pour des valeurs de q très voisines de* 1, *l'invariant $F(q)$ ne dépend que du déterminant de la forme quadratique.* C'est là une propriété analogue à celle de $J(s)$ dont *Lejeune-Dirichlet* a tiré le parti que l'on sait et *elle pourrait jouer le même rôle.*

En faisant $x = y = 0$ dans la formule (5.), on trouve:

$$F(e^{-t}) = \frac{2\pi}{Et} F\left(e^{\frac{-4\pi^2}{E^2 t}}\right). \tag{6.}$$

Cela est vrai quelle que soit la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$, mais si elle est à coëfficients entiers, on a de plus

$$F(e^{-t-2i\pi}) = F(e^{-t}). \tag{7.}$$

En posant $t = 2i\pi u$ et $F(e^{-2i\pi u}) = \Phi(u)$, les équations (6.) et (7.) deviennent

$$\Phi(u) = \frac{-i}{Eu} \Phi\left(\frac{-1}{E^2 u}\right), \tag{6$^{\text{bis}}$.}$$

$$\Phi(u+1) = \Phi(u). \tag{7$^{\text{bis}}$.}$$

Ces équations nous montrent que $\Phi^2(u)$ est une fonction thétafuchsienne du groupe fuchsien engendré par les deux substitutions

$$(u, u+1), \qquad \left(u, -\frac{1}{E^2 u}\right).$$

L'étude de ce groupe fuchsien jetterait sans doute quelque lumière sur les propriétés arithmétiques des formes quadratiques. Bornons-nous à dire qu'il est formé de deux séries de substitutions; à savoir les substitutions

$$u, \frac{\alpha u+\beta}{\gamma E^2 u+\delta}; \qquad \alpha\delta-\beta\gamma E^2=1; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers}$$

et les substitutions

$$u, \frac{\alpha E u+\frac{\beta}{E}}{\gamma E u+\delta E} \qquad \alpha\delta E^2-\beta\gamma=1; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers.}$$

Les substitutions de la 1ère série forment une Congruenzgruppe qui est un sous-groupe d'indice 2 de notre groupe fuchsien.

Pour montrer les relations des considérations qui précèdent avec l'analyse de *Lejeune-Dirichlet*, nous choisirons un exemple simple. Dans ses œuvres complètes (Tome 1, page 468) l'illustre géomètre considère en particulier les formes proprement primitives de déterminant $\pm p, p$ étant un nombre premier de la forme $4\nu+3$ et il démontre la formule suivante

$$\Sigma\Sigma q^P = 2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)q^{nn'}. \tag{8.}$$

Dans le 1er membre P désigne une forme quadratique à indéterminées entières; et la double sommation s'étend d'une part à toutes les formes quadratiques proprement primitives de déterminant $-p$, non équivalentes; et d'autre part à tous les systèmes de valeurs entières des indéterminées qui ne rendent pas la forme P égale à un entier divisible par 2 ou par p. Dans le 2d membre la sommation s'étend à tous les entiers n et n' impairs et premiers à p.

Il en résulte que $2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)$ représente le nombre des représentations de l'entier nn' par les formes du système; la sommation doit être étendue à tous les diviseurs de nn'.

Cette formule peut être mise sous une forme plus commode. Soit en effet αp^m un nombre impair quelconque, α étant premier à p; je dis que le nombre des représentations est le même pour α et pour αp^m; en effet le nombre des représentations propres de α (c'est-à-dire des représentations telles que les deux indéterminées soient des entiers *premiers entre eux*) est égal au nombre des solutions de la congruence $x^2+p\equiv 0$ (mod. α); le nombre *total* des représentations de α est égal à la somme des nombres des représentations propres des divers entiers $\frac{\alpha}{k^2}$, k étant l'un des diviseurs carrés de α.

Le nombre des représentations propres de αp est égal au nombre des solutions distinctes de l'équation $\alpha p c - b^2 = p$, ou $\alpha p c - p^2 \beta^2 = p$, ou $\alpha c - p\beta^2 = 1$ ou $p^2\beta^2 + p \equiv 0$ (mod. α), ou $x^2 + p \equiv 0$ (mod. α), puisqu'on a toujours un nombre β tel que $p\beta \equiv x$ (mod. α). C'est donc le nombre des représentations propres de α. Le nombre total des représentations de αp est égal à la somme des nombres de représentations de $\frac{\alpha p}{k^2}$, ou de $\frac{\alpha}{k^2}$ c'est-à-dire au nombre total des représentations de α.

Si nous considérons ensuite les nombres αp^{2q} et αp^{2q+1}, nous voyons qu'ils ne peuvent être représentés que si les deux indéterminées entières sont divisibles par p^q, de sorte que le nombre de leurs représentations est le même que pour α ou que pour αp, c'est-à-dire encore que pour α.

Dans ces conditions la formule (8.) peut se transformer de la façon suivante

$$(8^{\text{bis}}.) \qquad \Sigma\Sigma q^P = 2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right) q^{nn'}.$$

L'écriture est la même, mais les sommations se font dans des conditions différentes. Dans le 1^er^ membre, elles s'étendent non-seulement aux termes où P est impair et premier à p, mais à tous ceux où P est impair. De même dans le 2^d^ membre, n est impair et premier à p, mais n' est seulement assujetti à être impair. Nous pouvons même supposer que n et n' sont l'un et l'autre assujettis seulement à être impairs, à la condition de poser

$$\left(\frac{n}{p}\right) = 0$$

pour n divisible par p.

Le second membre peut encore s'écrire:

$$2\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

ou encore en appliquant la formule de la page 364 des œuvres complètes citées

$$\frac{2}{\sqrt{p}}\Sigma\Sigma\sin\frac{2an\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}} - \frac{2}{\sqrt{p}}\Sigma\Sigma\sin\frac{2bn\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

où a désigne un reste quadratique à p et b un non-reste, et où l'une des sommations s'étend à tous les nombres impairs n et l'autre à tous les restes ou non-restes a ou b. Quant au 1^er^ membre il peut s'écrire:

$$\frac{1}{2}\Sigma F(q)-\frac{1}{2}\Sigma F(-q)$$

où $F(q)$ désigne notre invariant et où la sommation s'étend à toutes les formes de déterminant $-p$, proprement primitives et non équivalentes. Nous avons donc finalement

$$(9.)\quad \Sigma F(q)-\Sigma F(-q)=\frac{4}{\sqrt{p}}\Sigma\sin\frac{2an\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}}-\frac{4}{\sqrt{p}}\Sigma\sin\frac{2bn\pi}{p}\frac{q^n}{1-q^{2n}}.$$

Je n'ai écrit qu'un signe Σ dans le 2[d] membre pour abréger l'écriture, mais ce signe simple doit être regardé comme équivalent au signe double défini plus haut.

Nous avons vu plus haut comment les formules (5.) et (6.) permettent d'évaluer $F(q)$. Disons quelques mots de $F(-q)$; nous pouvons supposer que l'on a choisi dans chaque classe, comme type de cette classe une forme quadratique dont les coëfficients extrêmes a et c sont tous deux impairs. Dans ces conditions la parité de l'exposant de q est la même que celle de $m+n$, il en résulte que nous avons, en partant de la série $\Theta(x,y)$ définie par l'équation (2.)

$$F(q)=\Theta(0,0),\qquad F(-q)=\Theta(\pi,\pi).$$

Reprenons donc la formule (5.) et faisons y successivement $x=y=0$, $x=y=\pi$, nous trouverons

$$(10.)\qquad F(q)=\Sigma\frac{2\pi}{Et}e^{-P},\quad F(-q)=\Sigma\frac{2\pi}{Et}e^{-P},$$

$$P=\frac{\pi^2}{E^2t}(a\mu^2-2b\mu\nu+c\nu^2)$$

où μ et ν désignent deux entiers pairs dans le cas de $F(q)$ et deux entiers impairs dans le cas de $F(-q)$.

Cela posé, reprenons l'égalité

$$\Sigma F(q)-\Sigma F(-q)=4\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

et faisons y t très voisin de 0, et par conséquent q très voisin de 1. Toutes les exponentielles e^{-P} deviendront très petites, à l'exception d'une seule qui figure dans $F(q)$ et qui correspond à $\mu=\nu=0$. Le 1[er] membre se réduit donc à

$$h\frac{2\pi}{Et}=\frac{\pi}{t\sqrt{p}}h$$

(h étant le nombre des classes), puisque

$$p = ac - b^2 = \frac{1}{4}E^2.$$

Passons au 2^d membre; on a sensiblement:

$$q^n = 1;\ 1 - q^{2n} = (1-q)\frac{dq^{2n}}{dq} = 2n(1-e^{-t})\,q^{2n-1} = 2nt.$$

Le 2^d membre se réduit donc à

$$\frac{2}{t}\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$$

d'où enfin

$$h = \frac{2\sqrt{p}}{\pi}\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}.$$

C'est la formule de *Lejeune-Dirichlet.*

Nous pouvons maintenant poser:

$$\varphi(u) = \Sigma \sin 2nu\pi \frac{q^n}{1-q^{2n}}$$

d'où

$$\Sigma F(q) - \Sigma F(-q) = \frac{4}{\sqrt{p}}\left[\Sigma\varphi\left(\frac{a}{p}\right) - \Sigma\varphi\left(\frac{b}{p}\right)\right] \tag{9bis.}$$

et chercher à étudier et à transformer $\varphi(u)$. On trouve tout de suite

$$2i\varphi(u) = \Sigma e^{2inu\pi}\frac{q^n}{1-q^{2n}} - \Sigma e^{-2inu\pi}\frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

$$2i\varphi(u) = \Sigma e^{2inu\pi} q^{nn'} - \Sigma e^{-2inu\pi} q^{nn'},$$

$$2i\varphi(u) = \Sigma\frac{e^{2iu\pi}q^{n'}}{1-e^{4iu\pi}q^{2n'}} - \Sigma\frac{e^{-2iu\pi}q^{n'}}{1-e^{-4iu\pi}q^{2n'}}.$$

Sous cette forme, on voit que $\varphi(u)$ est une fonction doublement périodique admettant pour infinis:

$$u = \frac{k}{2} \pm \frac{n'it}{2\pi}$$

k étant entier et n' impair. J'ai mis le signe $\pm$ pour éviter toute ambiguité, le nombre n' ayant jusqu'ici été supposé positif.

Quant au résidu, il est égal à $+\frac{1}{8\pi}$, si k est pair et à $-\frac{1}{8\pi}$, si k est impair. Nous achèverons de déterminer la fonction $\varphi(u)$ en rappelant que

$\varphi(0)=0$. On a donc

$$8\pi\varphi(u)=\zeta(u-\omega')-\zeta(u-\omega-\omega')-\eta$$

en donnant à ω, ω', η leur signification habituelle dans la théorie des fonctions elliptiques et posant:

$$2\omega'=\frac{it}{\pi},\quad 2\omega=1,\quad q=e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}=e^{-t}.$$

Nous voyons ensuite que la fonction $\varphi(u)$ devient infinie pour

$$e^{\frac{2\pi^2 u}{t}}=-q_1^k,\quad q_1=e^{-\frac{\pi^2}{t}}$$

avec le résidu $\frac{1}{8\pi}$ pour k pair et $\frac{-1}{8\pi}$ pour k impair. Nous pouvons donc écrire, en posant pour abréger $e^{\frac{2\pi^2 u}{t}}=X$:

$$\varphi(u)=\frac{\pi}{4t}\,\Sigma\Big(\frac{1}{1+Xq_1^{2k}}-\frac{1}{1+Xq_1^{2k+1}}\Big)+\text{const.}$$

et comme la constante doit être telle que $\varphi(u)$ s'annule pour $u=0$, c'est-à-dire $X=1$:

$$(11.)\quad \frac{4t}{\pi}\,\varphi(u)=\Sigma\Big(\frac{1}{1+Xq_1^{2k}}-\frac{1}{1+q_1^{2k}}\Big)-\Sigma\Big(\frac{1}{1+Xq_1^{2k+1}}-\frac{1}{1+q_1^{2k+1}}\Big).$$

Cherchons d'abord l'expression du 2^d^ membre pour t très petit; nous voyons d'abord que q_1 tend vers 0 pour $t=0$; nous devons ensuite faire une distinction suivant que $a=pu$ est compris entre 0 est $\frac{p}{2}$, ou entre $\frac{p}{2}$ et p.

Dans le 1^er^ cas X tend vers l'infini et Xq_1 vers zéro; dans le 2^d^ cas Xq_1 tend vers l'infini et Xq_1^2 vers zéro.

Envisageons alors les divers termes du 2^d^ membre. Dans le 1^er^ cas

les	termes	en	q_1^{2k}	$(k<0)$	tendent	vers	0
„	„	„	q_1^{2k}	$(k=0)$	„	„	$-\frac{1}{2}$
„	„	„	q_1^{2k}	$(k>0)$	„	„	0
„	„	„	q_1^{2k+1}	$(k<0)$	„	„	0
„	„	„	q_1^{2k+1}	$(k=0)$	„	„	0
„	„	„	q_1^{2k+1}	$(k>0)$	„	„	0.

De sorte qu'en définitive le second membre tend vers $-\frac{1}{2}$.

Dans le 2^d cas, il n'y a de changement à faire que pour les termes en q_1^{2k+1}, $k=0$; ici Xq_1 tend vers l'infini, au lieu de tendre vers 0, et q_1 tend toujours vers zéro, de sorte que

$$\frac{1}{1+Xq_1}-\frac{1}{1+q_1}$$

tend vers -1 et non plus vers 0, et le second membre tend vers $+\frac{1}{2}$ et non plus vers $-\frac{1}{2}$. On a donc finalement

$$\frac{4t}{\pi}\varphi\left(\frac{a}{p}\right)=\pm\frac{1}{2}$$

où l'on doit prendre le signe + ou le signe — suivant que a est compris entre $\frac{p}{2}$ et p ou entre 0 et $\frac{p}{2}$.

Si alors dans la formule (9^{bis}.) nous supposons t très petit, le 1^er membre se réduit à $\frac{\pi h}{t\sqrt{p}}$, et le second à $\frac{\pi}{t\sqrt{p}}(A-B)$, A désignant le nombre des restes quadratiques et B celui des non-restes compris entre 0 et $\frac{p}{2}$. Nous retrouvons ainsi une formule de *Lejeune-Dirichlet.*

Si nous reprenons l'équation (11.) nous pourrons développer chacun des termes du 2^d membre

$$\frac{1}{1+Xq_1^k},\qquad \frac{1}{1+q_1^k}$$

suivant les puissances croissantes ou décroissantes de Xq_1^k ou q_1^k, suivant que Xq_1^k ou q_1^k est $<$ ou >1: excepté bien entendu pour le terme

$$\frac{1}{1+q_1^0}$$

qui est constant et égal à $\frac{1}{2}$.

Dans ces conditions $\varphi\left(\frac{a}{b}\right)$ va se trouver développé suivant les puissances de

$$X^{\pm 1}=e^{\pm\frac{2\pi^2 a}{pt}}=e^{\pm\frac{8\pi^2 a}{E^2 t}},\qquad q_1=e^{-\frac{\pi^2}{t}}=\left(e^{-\frac{4\pi^2}{E^2 t}}\right)^p$$

c'est-à-dire en définitive suivant les puissances de $e^{-\frac{4\pi^2}{E^2 t}}$.

Il en est de même pour les mêmes raisons de $\varphi\left(\frac{b}{p}\right)$, et par conséquent du 2^d membre de (9^{bis}.). Il en est déjà de même du 1^er membre par suite des formules (10.) et (10^{bis}.).

En identifiant les deux développements, on trouverait de nouveaux théorèmes d'arithmétique.

§ 6. *Invariants des Formes Quadratiques Indéfinies.*

Il n'est pas possible, pour les formes quadratiques indéfinies de trouver des invariants, au sens que nous avons donné à ce mot jusqu'ici, c'est-à-dire des fonctions *continues* des coëfficients de la forme, et qui restent inaltérées quand la forme subit une transformation linéaire quelconque à coëfficients entiers, et cela quelle que soit la valeur entière ou fractionnaire du déterminant de la forme. Cela tient à ce que le groupe des transformations à coëfficients entiers qui est *proprement* discontinu, quand on prend pour variables les rapports des coëfficients d'une forme définie, ou ce qui revient au même les deux racines imaginaires conjuguées d'une équation du 2^d degré, n'est *qu'improprement* discontinu quand on prend pour variables les rapports des coëfficients d'une forme indéfinie, ou ce qui revient au même les deux racines réelles d'une équation du 2^d dégré (cf. pour la définition des groupes proprement et improprement discontinus, Acta Mathematica, tome 3, page 49).

En revanche pour un déterminant entier déterminé, et en se bornant aux formes à coëfficients entiers, en renonçant par conséquent à envisager des fonctions continues de ces coëfficients, on peut construire des invariants arithmétiques, c'est ce qu'a déjà fait *Lejeune-Dirichlet* dans le mémoire que j'ai cité.

Soit

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = F(m, n)$$

une forme quadratique indéfinie proprement primitive et à coëfficients entiers, de déterminant

$$b^2 - ac = D > 0.$$

On sait qu'il existe une infinité de solutions de l'équation de *Pell*

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

et que ces solutions peuvent s'obtenir par l'égalité

$$x \pm y\sqrt{D} = (t \pm u\sqrt{D})^\mu,$$

μ étant entier et $x = t$, $y = u$ étant la plus petite solution de l'équation de *Pell.* La forme quadratique peut alors être reproduite par une transformation linéaire à coëfficients entiers qui est la transformation

$$[m, n;\ (t - bu)m - cun,\ aum + (t + bu)n] \text{ que j'appelle } T.$$

On a en effet identiquement

$$(1.)\qquad F(m, n) = F[(t-bu)m - cun,\ aum + (t+bu)n]$$

Nous pouvons aussi présenter la chose sous une autre forme par l'introduction des nombres complexes. Soit en effet

$$x + y\sqrt{D}$$

un nombre complexe où $\sqrt{D}$ sera le symbole d'une unité complexe caractérisée par la loi de multiplication $\sqrt{D}\cdot\sqrt{D} = D$; nous aurons, par définition:

$$\text{norme } (x + y\sqrt{D}) = x^2 - y^2 D$$

et par conséquent:

$$\text{norme } (t + u\sqrt{D}) = 1$$

et quel que soit l'entier m positif ou négatif:

$$\text{norme } (t + u\sqrt{D})^m = 1.$$

De plus on aura

$$F(m, n) = \text{norme}\left(\frac{am+bn}{\sqrt{a}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right).$$

Dans ces conditions l'équation (1.) signifie que l'on a également

$$F(m, n) = \text{norme}\left[\left(\frac{am+bn}{\sqrt{a}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right)(t + u\sqrt{D})\right].$$

D'ailleurs nous pouvons plus généralement encore poser:

$$F(m, n) = \text{norme}\left[\left(\frac{am+bn}{\sqrt{a}} + \frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right)(\lambda + \mu\sqrt{D})\right]$$

λ et μ étant deux constantes quelconques, entières ou non, telles que la norme du nombre complexe $\lambda + \mu\sqrt{D}$, c'est-à-dire que la quantité $\lambda^2 - D\mu^2$ soit égale à 1. Nous pouvons donc d'une infinité de manières mettre $F(m, n)$ sous la forme:

$$F(m, n) = \text{norme } [Am + Bn],$$

$A = \alpha + \alpha'\sqrt{D}$, $B = \beta + \beta'\sqrt{D}$ étant deux nombres complexes tels que

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

Le nombre complexe $x+y\sqrt{D}$ pourra être représenté par le point dont les coordonnées rectangulaires sont x et y; et je suppose que ce point se trouve sur la droite

$$\frac{y}{x}=h$$

qui passe par l'origine et que j'appelle OA; le point qui représente le nombre $(x+y\sqrt{D})(t+u\sqrt{D})$ sera alors sur la droite

$$\frac{y}{x}=h'$$

qui passe également par l'origine et que j'appelle OA'; les droites OA et OA' forment un faisceau homographique dont les droites doubles sont les droites

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{D}}$$

que j'appelle OB et OB'. Ces deux droites doubles partagent le plan en quatre angles, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$; dans deux de ces angles Ω_1 et Ω_3 opposés par le sommet, la norme de $x+y\sqrt{D}$ est positive, dans les deux autres elle est négative.

Soit OA_0 une demi-droite partant de l'origine et située dans l'angle Ω_1; soit OA_1 la transformée de OA_0 par la transformation homographique qui change OA en OA', soit OA_2 la transformée de OA_1, OA_3 celle de $OA_2, \ldots$ OA_0 celle de OA_{-1}, OA_{-1} celle de $OA_{-2}, \ldots$: les différentes droites OA_k, où l'indice k prend toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, vont diviser l'angle Ω_1 en une infinité d'angles partiels. Et si l'on considère l'un de ces angles partiels et qu'on le transforme par la transformation homographique en question, ou par l'une de ses puissances, ou par une puissance de son inverse, on obtiendra successivement tous les angles partiels. Nous appellons ω_0 l'angle partiel compris entre OA_0 et OA_1, en y comprenant la demi-droite OA_0, mais sans y comprendre la demi-droite OA_1. Il est clair alors que si $x+y\sqrt{D}$ prend toutes les valeurs complexes représentées par un point intérieur à ω_0, et k toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles, le nombre complexe

$$(x+y\sqrt{D})(t+u\sqrt{D})^k$$

prendra toutes les valeurs représentées par un point intérieur à Ω_1.

On opérerait de même sur les 3 autres angles $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$. Observons maintenant que d'après les formules précédentes

$$\left(\frac{am+bn}{\sqrt{a}}+\frac{n}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right)(\lambda+\mu\sqrt{D})\,(t+u\sqrt{D})=(Am+Bn)\,(t+u\sqrt{D})$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\left(\frac{am'+bn'}{\sqrt{a}}+\frac{n'}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right)(\lambda+\mu\sqrt{D})=Am'+Bn'$$

en posant:

$$m'=(t-bu)m-cun, \qquad n'=aum+(t+bu)n.$$

La transformation linéaire

$$V=\begin{vmatrix} t-bu & -cu \\ au & t+bu \end{vmatrix}$$

qui lie m' et n' à m et à n est à coëfficients entiers, *pourvu que la forme quadratique $F(m,n)$ ait ses coëfficients entiers.*

Considérons les divers points représentatifs des divers nombres complexes

$$Am+Bn,$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières. Ces points formeront un *réseau* analogue à celui qu'on obtient quand on partage le plan en une infinité de parallélogrammes égaux, et qui est formé par les différents sommets de ces parallélogrammes. Les points du réseau peuvent d'une infinité de manières se distribuer en une infinité de *files* parallèles.

Il résulte de ce qui précède que les transformés des divers points du réseau par la transformation homographique définie plus haut et qui correspond à la transformation linéaire V, que ces transformés, dis-je, appartiennent encore au réseau, mais à une condition, c'est que la forme $F(m,n)$ ait ses coëfficients entiers.

D'autre part nous avons vu que le plan peut être partagé en quatre angles $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$; que Ω_1 se partage en une infinité d'angles partiels $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n, \ldots \omega_{-1}, \ldots \omega_{-n}, \ldots$; transformés les uns des autres par la transformation homographique. On peut partager de même $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ et désigner par $\omega_i', \omega_i'', \omega_i'''$ les divers angles analogues à ω_i formés respectivement dans Ω_2, Ω_3 et Ω_4.

Cela posé, soit $\varphi(x)$ une fonction uniforme quelconque de x; formons la série

$$\Sigma\varphi[F(m,n)]$$

et étendons la sommation à tous les points du réseau intérieurs à l'angle ω_0. Si la série en question converge, elle représente un invariant, *pourvu que les coëfficients de $F(m,n)$ soient entiers,* et cette condition suffit pour distinguer ce nouvel invariant de ceux dont il a été question dans les paragraphes précédents.

Toujours à la même condition, la valeur de la série est indépendante de la position de la demi-droite OA_0.

Nous aurions pu étendre la sommation outre l'angle ω_0, à l'angle ω_0'. Il est inutile de l'étendre aux angles ω_0'' et ω_0'''; on ne ferait ainsi que doubler la somme de la série, puisque les angles ω_0 et ω_0'', ω_0' et ω_0''' sont opposés par le sommet et que $\varphi[F(m,n)]$ ne change pas quand on change m et n en $-m$ et $-n$. En général nous nous bornerons à étendre la sommation à l'angle ω_0; celà revient au même d'ailleurs que d'étendre la sommation aux angles ω_0 et ω_0' et de supposer que la fonction $\varphi(x)$ est nulle pour $x<0$.

En général nous supposerons

$\varphi(x)=\frac{1}{x^s}$ pour $x>0$, $\varphi(x)=0$ pour $x<0$ et nous définirons un invariant

$$J(s)=\Sigma\frac{1}{F^s}$$

convergeant pourvu que $s>1$ et analogue à ceux des paragraphes précédents. *Lejeune-Dirichlet* ne fait pas tout à fait comme cela; il prend

$\varphi(x)=\frac{1}{x^s}$ pour x entier, positif et impair,

$\varphi(x)=0$ pour x entier, positif et pair et pour x négatif.

La valeur de $\varphi(x)$ pour x non-entier peut être quelconque, puisque $F(m,n)$ est toujours entier. Il forme ainsi un invariant que nous appellerons $J_1(s)$.

Dans l'article que j'ai inséré au Bulletin de l'Association Française (Congrès d'Alger 1881, j'en ai introduit un autre) j'envisage le nombre imaginaire λ défini par l'équation

$$(t+u\sqrt{D})^\lambda=1,$$

j'envisage le nombre complexe $Am + Bn$, et le nombre conjugué $A_0 m + B_0 n$ qui se déduit du premier en changeant $\sqrt{D}$ en $-\sqrt{D}$, de telle sorte que

$$(Am + Bn)(A_0 m + B_0 n) = F(m, n)$$

et je forme la série

$$\Sigma (Am + Bn)^{-s+\lambda} (A_0 m + B_0 n)^{-s-\lambda}$$

étendue à l'angle ω_0.

C'est un invariant des deux formes linéaires simultanées $Am + Bn$ et $A_0 m + B_0 n$.

Il me reste à définir les limites de l'angle ω_0; nous pouvons les exprimer par les inégalités

$$(2.) \qquad n \geqq 0, \quad aum + (t + bu)n < 0$$

ou plus généralement puisque la position de la droite OA_0 est indifférente, par les inégalités

$$(2^{\text{bis}}.) \qquad \begin{cases} \mu(am + bn) + \lambda n \geqq 0, \\ (\lambda u + \mu t)(am + bn) + (\lambda t + \mu u D)n < 0 \end{cases}$$

λ et μ étant deux quantités réelles quelconques.

Nous préférerons dans la suite définir $\varphi(x)$ d'une autre façon. Nous prendrons soit

$$\varphi(x) = q^x \text{ pour } x \geqq 0, \quad \varphi(x) = 0 \text{ pour } x < 0$$

ce qui nous fournira un invariant que nous appellerons $F(q)$ soit

$$\varphi(x) = q^x \text{ pour } x \text{ entier positif impair,}$$
$$\varphi(x) = 0 \text{ pour } x \text{ entier positif pair, ou pour } x \text{ négatif}$$

ce qui nous fournira un second invariant que nous appellerons $F_1(q)$. Nous aurons d'ailleurs comme au § 5

$$\Gamma(s) J(s) = \int_0^\infty z^{s-1} [F(e^{-z}) - 1] dz,$$

$$\Gamma(s) J_1(s) = \int_0^\infty z^{s-1} F_1(e^{-z}) dz.$$

Nous sommes ainsi conduits à examiner les séries

$$(3.) \qquad \Sigma q^{am^2 + 2bmn + cn^2} x^m y^n$$

tout à fait analogues à celles que l'on envisage dans la théorie des fonctions *Abéliennes,* mais où la forme $am^2+2bmn+cn^2$ est indéfinie. La série étendue à toutes les valeurs entières de m et de n serait divergente; elle convergera au contraire si l'on se borne aux valeurs de m et de n qui satisfont aux inégalités (2.) Au lieu de la série (3.) envisageons la série

$$(3^{\text{bis}}.) \qquad \sum \varepsilon_{mn} q^{am^2+2bmn+cn^2} x^m y^n,$$

le nombre ε_{mn} étant égal tantôt à $+1$, tantôt à -1; à savoir:

$$\varepsilon_{mn} = +1 \quad \text{si} \quad \lambda m + \mu n \geqq 0,$$
$$\varepsilon_{mn} = -1 \quad \text{si} \quad \lambda m + \mu n < 0.$$

Cette série ne sera pas convergente, mais nous la désignerons par

$$H(x, y;\ \lambda, \mu)$$

car elle dépend évidemment du choix des constantes réelles λ, μ.

Si nous envisageons maintenant la différence

$$H(x, y;\ \lambda, \mu) - H(x, y;\ \lambda', \mu')$$

ce sera encore une série de la forme $(3^{\text{bis}}.)$, mais où le coëfficient ε_{mn} aura pour valeurs

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_{mn} = 2 & \text{si } \lambda m + \mu n \geqq 0, & \lambda' m + \mu' n < 0 \\ \varepsilon_{mn} = 0 & \text{si } \lambda m + \mu n \geqq 0, & \lambda' m + \mu' n \geqq 0 \\ \varepsilon_{mn} = -2 & \text{si } \lambda m + \mu n < 0, & \lambda' m + \mu' n \geqq 0 \\ \varepsilon_{mn} = 0 & \text{si } \lambda m + \mu n < 0, & \lambda' m + \mu' n < 0. \end{array}$$

Cette fois la série peut être convergente et c'est ce qui arrive en particulier si nous prenons

$$\lambda = 0,\ \mu = 1;\quad \lambda' = au,\ \mu' = t + bu;$$

de façon à retrouver les inégalités (2.).

Envisageons le terme général de nos séries (3.) et $(3^{\text{bis}}.)$

$$q^{am^2+2bmn+cn^2} x^m y^n = \psi(x, y; m, n).$$

Si l'on change x et y en xq^{2a} et yq^{2b} et qu'on multiplie par xq^a, c'est comme si l'on changeait m en $m+1$; de sorte qu'on aura

$$xq^a \psi(xq^{2a}, yq^{2b}; m, n) = \psi(x, y; m+1, n)$$

et de même

$$yq^c\,\psi(xq^{2b}, yq^{2c}; m, n) = \psi(x, y; m, n+1)$$

et plus généralement α et β étant deux entiers quelconques:

$$(4.)\quad \psi(x, y;\, m+\alpha,\, n+\beta) = x^\alpha y^\beta q^{a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2}\,\psi(xq^{2(a\alpha+b\beta)}, yq^{2(b\alpha+c\beta)}; m, n).$$

Dans ces conditions, comparons les deux séries

$$(5.)\quad H(x, y; \lambda, \mu),\quad x^\alpha y^\beta q^{a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2} H(xq^{2(a\alpha+b\beta)}, yq^{2(b\alpha+c\beta)}; \lambda, \mu);$$

la première s'écrit

$$\Sigma\,\varepsilon_{mn}\,\psi(x, y; m, n)$$

et la seconde

$$\Sigma\,\varepsilon_{mn}\,\psi(x, y;\, m+\alpha,\, n+\beta).$$

Les termes correspondants des deux séries sont les mêmes si

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{m+\alpha,\, n+\beta}$$

c'est-à-dire si les deux quantités

$$(6.)\qquad \lambda m + \mu n,\qquad \lambda(m+\alpha) + \mu(n+\beta)$$

sont toutes deux négatives, ou ne le sont ni l'une ni l'autre.

Si nous supposons d'abord

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0$$

les deux conditions seront satisfaites en même temps et l'on aura

$$H(x, y; \lambda, \mu) = q^{a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2} H(xq^{2(a\alpha+b\beta)}, yq^{2(b\alpha+c\beta)}; \lambda, \mu)\, x^\alpha y^\beta.$$

Supposons ensuite que λ et μ soient deux entiers premiers entre eux, de même que α et β et que l'on ait

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 1.$$

Dans ce cas la différence des deux expressions (6.) sera égale à 1, les nombres ε_{mn} et $\varepsilon_{m+\alpha,\, n+\beta}$ seront égaux à moins que

$$\lambda(m+\alpha) + \mu(n+\beta) = 0,\qquad \lambda m + \mu n = -1 < 0.$$

Alors on a

$$\varepsilon_{mn} = -1\qquad \varepsilon_{m+\alpha,\, n+\beta} = 1.$$

La différence des deux séries (5.) est donc

$$(7.)\qquad 2\Sigma\,\psi(x, y; m, n)$$

en donnant à m et n toutes les valeurs entières telles que

$$\lambda m + \mu n = 0.$$

C'est (au facteur 2 près) une série analogue à la série (3.), mais où la sommation au lieu d'être étendue à tous les sommets du *réseau*, l'est seulement à une *file* de ce réseau.

Or qu'est ce qu'une pareille série; considérons la série

$$(8.) \qquad \Sigma \psi(x, y; m_0 + \mu t, n_0 - \lambda t)$$

où m_0 et n_0 représentent deux entiers fixes et où t peut prendre toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Les points $m_0 + \mu t$, $n_0 - \lambda t$ constitueront une *file*; et l'on aura

$$\lambda(m_0 + \mu t) + \mu(n_0 - \lambda t) = \text{const.}$$

D'ailleurs la série (8.) peut s'écrire

$$x^{m_0} y^{n_0} \Sigma A q^{ht^2+kt} X^t$$

où

$$A = q^{am_0^2 + 2bm_0 n_0 + cn_0^2}; \qquad h = a\mu^2 - 2b\lambda\mu + c\lambda^2;$$
$$k = 2am_0\mu - 2cn_0\lambda + 2b(n_0\mu - m_0\lambda)$$

sont des constantes et où

$$X = x^\mu y^{-\lambda}$$

est la nouvelle variable indépendante. C'est au facteur simple près $x^{m_0} y^{n_0}$, une *série théta elliptique* par rapport à la variable $\log X$.

Ainsi *la différence des deux séries* (5.) *s'exprime par les fonctions elliptiques.*

Soit maintenant $\lambda\alpha + \mu\beta$ quelconque; nous supposons toujours λ et μ entiers et premiers entre eux. Il arrive encore que ε_{mn} et $\varepsilon_{m+\alpha, n+\beta}$ sont égaux, sauf quand l'une des deux expressions (6.) est négative sans que l'autre le soit. Les points m, n pour lesquels cette dernière circonstance se présente forment un nombre fini de *files parallèles* du réseau. Ainsi la différence des deux séries (5.) ne sera autre chose que la série (7.) étendue à un nombre fini de files parallèles. Elle s'exprimera donc encore par les séries théta elliptiques.

Prenons maintenant comme nous l'avons dit plus haut

$$\lambda = 0, \ \mu = 1; \qquad \lambda' = au, \ \mu' = t + bu.$$

La série

$$\Theta(x, y) = H(x, y;\ \lambda, \mu) - H(x, y;\ \lambda', \mu')$$

est alors convergente; et nous avons d'ailleurs en faisant $\alpha = 1, \beta = 0$

$$\begin{aligned} & x q^a \Theta(x q^{2a}, y q^{2b}) - \Theta(x, y) \\ & = x q^a H(x q^{2a}, y q^{2b};\ \lambda, \mu) - H(x, y;\ \lambda, \mu) \\ & - x q^a H(x q^{2a}, y q^{2b};\ \lambda', \mu') + H(x, y;\ \lambda', \mu'). \end{aligned}$$

La différence

$$x q^a \Theta(x q^{2a}, y q^{2b}) - \Theta(x, y)$$

s'exprime donc par les séries théta elliptiques et il en est de même pour la même raison de la différence

$$y q^c \Theta(x q^{2b}, y q^{2c}) - \Theta(x, y).$$

L'exemple le plus simple est celui où

$$a = c = 1, \qquad b > 0$$

d'où

$$t = b, \quad u = -1, \quad D = b^2 - 1.$$

Les inégalités (2.) deviennent alors

$$n \geqq 0, \qquad -m < 0$$

d'où

$$\Theta(x, y) = H(x, y;\ 0, 1) - H(x, y;\ -1, 0)$$

ou bien

$$\Theta(x, y) = 2 \Sigma q^{m^2 + 2bmn + n^2} x^m y^n - 2 \Sigma q^{m^2 + 2bmn + n^2} x^m y^n$$

la 1ère sommation étant étendue à toutes les valeurs telles que

$$m > 0, \qquad n \geqq 0$$

et la 2de à toutes les valeurs telles que

$$n < 0, \qquad m \leqq 0.$$

Quand m et n sont de même signe, le terme correspondant figure sous le 1er signe Σ si ce signe est positif, et sous le 2d s'il est négatif. On trouve encore sous le 1er signe Σ les termes où $n = 0$, $m > 0$, et sous le 2d ceux où $m = 0$, $n < 0$; le terme $m = n = 0$ ne figure nulle part.

On trouve ensuite

(9.) $$x^{-1} q\, \Theta(x q^{-2}, y q^{-2b}) - \Theta(x, y) = 2 \Sigma q^{n^2} y^n$$

èt

(9^bis.) $$y q\, \Theta(x q^{2b}, y q^2) - \Theta(x, y) = -2 \Sigma q^{m^2} x^m.$$

On voit que les seconds membres

$$\Sigma q^{n^2} y^n, \quad \Sigma q^{m^2} x^m$$

sont les fonctions Θ elliptiques ordinaires.

Nous sommes amenés à nous demander si l'on peut construire une fonction Ω jouissant de la double propriété

(10.) $$\begin{cases} x q \Omega(x q^2, y q^{2b}) = \Omega(x, y), \\ y q \Omega(x q^{2b}, y q^2) = \Omega(x, y) \end{cases}$$

c'est-à-dire satisfaisant aux conditions que l'on obtiendrait en privant les équations (9.) et (9^bis.) de leurs seconds membres.

Les équations (10.) entraînent la suivante

$$x^\alpha y^\beta q^{\alpha^2 + 2b\alpha\beta + \beta^2} \Omega(x q^{2\alpha + 2b\beta}, y q^{2b\alpha + 2\beta}) = \Omega(x, y)$$

qui donnent pour $\alpha = 1$, $\beta = -b$

$$x y^{-b} q^{-D} \Omega(x q^{-2D}, y) = \Omega(x, y)$$

et pour $\alpha = -b$, $\beta = 1$

$$x^{-b} y q^{-D} \Omega(x, y q^{-2D}) = \Omega(x, y).$$

Posons

$$x = \xi y^{+b}; \qquad \Omega(\xi y^{+b}, y) = \Omega_0(\xi, y).$$

Les équations précédentes deviendront

$$\xi^\alpha y^{\beta + ab} q^{\alpha^2 + 2b\alpha\beta + \beta^2} \Omega_0(\xi q^{-2D\alpha}, y q^{2b\alpha + 2\beta}) = \Omega_0(\xi, y)$$

ou

(10^bis.) $$\xi^\alpha y^\gamma q^{\gamma^2 - D\alpha^2} \Omega_0(\xi q^{-2D\alpha}, y q^{2\gamma}) = \Omega_0(\xi, y).$$

Il suffira de prendre

$$\Omega_0 = \Theta_1(\xi)\, \Theta_2(y)$$

en appelant Θ_1 et Θ_2 les fonctions d'une seule variable qui satisfont aux conditions

$$\xi q^{-D} \Theta_1(\xi q^{-2D}) = \Theta_1(\xi),$$
$$y q\, \Theta_2(y q^2) = \Theta_2(y).$$

La seconde est la fonction Θ elliptique

$$\Theta_2(y) = \Sigma q^{n^2} y^n$$

qui figure précisément dans les 2ds membres des équations (9.) et (9bis.). La 1ère est définie par une équation fonctionnelle analogue, mais où la quantité qui joue le rôle de q est de module > 1.

Il n'y a donc pas de fonction entière qui y satisfasse, mais on peut prendre

$$\Theta_1(\xi) = \frac{1}{\Sigma q^{Dm^2}\xi^m} = \frac{1}{\eta(\xi)}.$$

$\Omega(x, y)$ étant ainsi défini, si nous posons:

$$\frac{\Theta(x, y)}{\Omega(x, y)} = \Phi(x, y),$$

les équations (9.) et (9bis.) deviendront:

$$(11.)\quad \begin{cases} \Phi(xq^{-2}, yq^{-2b}) - \Phi(x, y) = \dfrac{2}{\Theta_1(\xi)} = 2\Sigma q^{Dm^2} x^m y^{-bm} = 2\eta(xy^{-b}), \\ \Phi(xq^{2b}, yq^2) - \Phi(x, y) = \dfrac{-2\Theta_2(x)}{\Theta_1(\xi)\Theta_2(y)} = \dfrac{-2\Theta_2(x)\eta(xy^{-b})}{\Theta_2(y)}. \end{cases}$$

Si nous posons pour abréger

$$\Phi(xq^{-2}, yq^{-2b}) = \Phi(x, y)S; \qquad q^{-D}x^{-1}y^b = A$$
$$\Phi(xq^{2b}, yq^2) = \Phi(x, y)S'; \qquad q^{-D}x^{-b}y = B$$

ces équations donneront aisément:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Phi S^2 - (1+A)\Phi S + A\Phi = 0, \\ \Phi SS' - \Phi S - \Phi S' + \Phi = 0, \\ \Phi S'^2 - (1+B)\Phi S' + B\Phi = 0. \end{cases}$$

Ces propriétés montrent suffisamment que la fonction $\Theta(x, y)$, bien qu'elle soit une transcendante nouvelle, est apparentée aux fonctions elliptiques. Nous avons considéré une forme quadratique $F(m, n)$ assez particulière; mais on aurait des résultats analogues avec une forme quadratique quelconque.

Remarquons que si l'on fait croître b indéfiniment, et tendre q vers 1 de telle façon que $q^b = q'$ demeure constant, on trouverait à la limite la série

$$2\Sigma \pm q'^{2mn} x^m y^n$$

m et n étant toujours assujettis aux mêmes conditions, et l'on reconnaîtrait un développement connu de la fonction doublement périodique de 2[d] espèce (cf. *Halphen*, Traité des Fonctions Elliptiques, tome 1, chapitre XIII).

Revenons au cas où la forme $F(m, n)$ est une forme quadratique quelconque indéfinie à coëfficients entiers. Voyons quelle relation cette transcendante $\Theta(x, y)$ peut avoir avec nos invariants arithmétiques. Supposons que l'on donne à x et à y des valeurs particulières qui soient des racines p^{es} de l'unité.

Notre série s'écrit:

$$\Theta(x, y) = H(x, y;\ 0, 1) - H(x, y;\ au, t+bu)$$

ou

$$\Theta(x, y) = 2\Sigma \pm q^{am^2+2bmn+cn^2} x^m y^n$$

où l'on ne prend que les points m, n situés dans l'angle ω_0 défini par les inégalités (2.) ou dans l'angle opposé par le sommet; à savoir avec le signe $+$ pour l'angle ω_0 et avec le signe $-$ pour l'angle opposé.

Pour retrouver notre invariant $F(q)$, il suffirait de supprimer les termes affectés du signe $-$ et de faire $x = y = 1$. Dans ce cas, nous pourrions comme nous l'avons dit plus haut sans changer la valeur de la série, remplacer l'angle ω_0 défini par les inégalités (2.) par l'angle analogue défini par les inégalités (2^{bis}.).

Cela tient à ce que si l'on pose

$$m' = (t - bu)m - cun,$$
$$n' = aum + (t + bu)n$$

on a

$$q^{am^2+2bmn+cn^2} = q^{am'^2+2bm'n'+cn'^2}.$$

Mais comme on n'aura pas en même temps, en général

$$x^m y^n = x^{m'} y^{n'} \tag{13.}$$

on changerait au contraire la valeur de $\Theta(x, y)$ en substituant les inégalités (2^{bis}.) aux inégalités (2.).

Si x et y sont des racines p^{es} de l'unité, la condition (13.) sera remplie pourvu que l'on ait

$$m \equiv m', \quad n \equiv n' \pmod p$$

ou bien

$$t \equiv 1, \quad u \equiv 0 \pmod p.$$

Cette dernière condition ne sera pas remplie en général quand t et u seront comme nous l'avons supposé jusqu'ici, les *plus petits* nombres entiers qui satisfont à l'équation de *Pell.* Mais si nous posons:

$$(t+u\sqrt{D})^{\mu}=t_{\mu}+u_{\mu}\sqrt{D}$$

nous pouvons toujours choisir μ de telle façon que

$$t_{\mu}\equiv 1,\ u_{\mu}\equiv 0 \pmod p.$$

Nous pourrons alors remplacer l'angle ω_0 par l'angle

$$\omega_0^{\mu}=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{\mu-1}$$

formé de l'angle ω_0 et de ses $\mu-1$ premiers transformés par la transformation homographique envisagé plus haut.

On a alors une fonction $\Theta_{\mu}(x,y)$ analogue à $\Theta(x,y)$ et définie par l'égalité

$$\Theta_{\mu}(x,y)=H(x,y;\ 0,1)-H(x,y;\ au_{\mu},t_{\mu}+bu_{\mu}).$$

On peut alors pourvu que x et y soient des racines p^{es} de l'unité, remplacer les inégalités qui définissent l'angle ω_0^{μ} et qui sont analogues aux inégalités (2.) par d'autres inégalités analogues aux inégalités (2^{bis}.). On a ainsi en désignant par λ et λ' des constantes réelles quelconques

$$\Theta_{\mu}(x,y)=H(x,y;\ \lambda'a,\lambda'b+\lambda)-H(x,y;\ \lambda_1'a,\lambda_1'b+\lambda_1)$$

en posant

$$\lambda_1'=\lambda u_{\mu}+\lambda' t_{\mu};\ \lambda_1=\lambda t_{\mu}+\lambda' u_{\mu}D.$$

Mais il importe d'examiner de plus près ce que c'est que $\Theta_{\mu}(x,y)$.

Soit

$$x=e^{\frac{2i\pi\xi}{p}},\quad y=e^{\frac{2i\pi\eta}{p}},\quad z=e^{\frac{2i\pi}{p}}$$

ξ et η étant deux entiers; nous aurons

$$x^m y^n=z^M,\qquad x^{m'}y^{n'}=z^{M'}$$

où

$$M=\xi m+\eta n;\qquad M'=\xi m'+\eta n'=\xi_1 m+\eta_1 n$$

en posant

$$\xi_1=\xi(t-bu)+au\eta;\qquad \eta_1=-cu\xi+\eta(t+bu)$$

et si nous posons de même

$$\xi_2=\xi_1(t-bu)+au\eta_1;\qquad \eta_2=-cu\xi_1+\eta_1(t+bu)$$

et ainsi de suite et de plus

$$x_k = z^{\xi k}, \qquad y_k = z^{\eta k};$$

nous aurons manifestement

$$\Theta_\mu(x, y) = \Theta(x, y) + \Theta(x_1, y_1) + \Theta(x_2, y_2) + \cdots + \Theta(x_{\mu-1}, y_{\mu-1}).$$

Mais il reste à voir si $\Theta_\mu(x, y)$ n'est pas identiquement nul. Si nous supposons $p = 2$, de telle façon que x et y soient égaux à ± 1, il en sera certainement ainsi, car les termes en

$$x^m y^n, \qquad x^{-m} y^{-n}$$

se détruiront.

Supposons donc que p soit un nombre premier impair ne divisant pas D, et que D soit reste quadratique à p de telle sorte que

$$D \equiv \lambda^2 (\text{mod } p).$$

Posons

$$t + \lambda u \equiv \alpha, \qquad t - \lambda u \equiv \alpha^{-1} \qquad (\text{mod } p).$$

Si l'on convient d'écrire

$$t_k + \sqrt{D}\, u_k = (t + u\sqrt{D})^k,$$

il en résultera

$$t_k + \lambda u_k \equiv \alpha^k, \qquad t_k - \lambda u_k \equiv \alpha^{-k} \qquad (\text{mod } p)$$

(J'écris bien entendu α^{-k} au lieu de α^{p-1-k} à cause du theorème de *Fermat* $\alpha^{p-1} \equiv 1$).

Cela posé nous avons

$$\xi_k = \xi(t_k - b u_k) + a u_k \eta; \qquad \eta_k = -c u_k \xi + \eta(t_k + b u_k)$$

et si l'on pose

$$M_k = \xi_k m + \eta_k n$$

il viendra

$$M_k \equiv A\alpha^k + A'\alpha^{-k} \qquad (\text{mod } p)$$

où A et A' sont des formes à coëfficients entiers doublement linéaires d'une part par rapport à m et n, d'autre part par rapport à ξ et η.

On vérifierait aisément en construisant effectivement ces formes, que l'on peut choisir m et n de façon que A et A' prennent des valeurs quelconques (par rapport au module p) et cela, quels que soient ξ et η, pourvu que $c\xi^2 - 2b\xi\eta + a\eta^2$ ne soit pas divisible par p. De même on peut choisir

ξ et η de façon que A et A' aient des valeurs quelconques pourvu que $am^2+2bmn+cn^2$ ne soit pas divisible par p.

Cela posé quel va être dans $\Theta_\mu(x,y)$ le coëfficient du terme en

$$q^{am^2+2bmn+cn^2}?$$

Cela va être

$$2\Sigma z^{M_k}-2\Sigma z^{-M_k}$$

ou

$$4i\Sigma\sin\left(\frac{2\pi}{p}M_k\right).$$

On doit donner à k sous le signe Σ toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $\mu-1$; (μ étant le premier entier tel que $\alpha^u\equiv 1 \bmod p$).

Si α est une racine primitive, ou plus généralement, toutes les fois que $\alpha^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1$, on a

$$\alpha^k\equiv-\alpha^{k+\frac{p-1}{2}},\qquad \alpha^{-k}\equiv-\alpha^{-k-\frac{p-1}{2}}$$

de sorte que

$$M_k=-M_{k+\frac{p-1}{2}},$$

et que la somme des sinus est nulle, et Θ_μ identiquement nul.

Supposons au contraire $\alpha^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1$, et soit par exemple

$$\alpha=2,\qquad p=7,\qquad \alpha^3\equiv 1$$

la somme des sinus devient

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$$

et n'est pas nulle.

Nous pouvons aussi envisager le cas où

$$t\equiv 1,\quad u\equiv 0 \pmod p),\quad \alpha=1,\ \mu=1$$

qui se présente certainement toutes les fois que p est un facteur premier qui divise u sans diviser D. Alors la somme des sinus se réduit au sinus unique

$$\sin\frac{2\pi M}{p}$$

et ne s'annule pas.

Je n'insisterai pas davantage, et je ne parlerai même pas du cas intéressant où D serait non-reste quadratique à p, et je me contenterai d'avoir montré par ces exemples que Θ_μ n'est pas toujours identiquement nul.

Supposons maintenant que l'on fasse subir à m et à n une transformation linéaire, en posant

$$(14.)\qquad m = \alpha m' + \beta n', \quad n = \gamma m' + \delta n'.$$

Posons

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = a'm'^2 + 2b'm'n' + c'n'^2,$$
$$\xi m + \eta n = \xi' m' + \eta' n'.$$

Comme $\Theta_\mu(x, y)$ dépend non seulement de x et de y, c'est-à-dire de ξ et de η mais encore de a, b, c, nous pourrons mettre ce fait en évidence en écrivant

$$\Theta_\mu(x, y) = \Theta(a, b, c; \xi, \eta),$$
$$\frac{1}{2}\Theta(a, b, c; \xi, \eta) = \Sigma q^{am^2+2bmn+cn^2} z^{\xi m+\eta n} - \Sigma q^{am^2+2bmn+cn^2} z^{\xi m+\eta n}$$

la 1ère sommation s'étendant aux valeurs de m et de n qui satisfont aux inégalités

$$(15.)\qquad n \geqq 0, \qquad a u_\mu m + (t_\mu + b u_\mu) n < 0$$

et la 2de à celles qui satisfont aux inégalités

$$(15^{\text{bis}}.)\qquad n < 0, \qquad a u_\mu m + (t_\mu + b u_\mu) n \geqq 0.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, nous pouvons remplacer les inégalités (15.) et (15^{bis}.) qui définissent l'angle ω_0^μ et qui sont analogues aux inégalités (2.) par d'autres inégalités analogues aux inégalités (2^{bis}.) et qui s'écrivent:

$$(16.)\qquad \lambda'(am + bn) + \lambda n \geqq 0; \quad (\lambda u_\mu + \lambda' t_\mu)(am + bn) + (\lambda t_\mu + \lambda' u_\mu D) n < 0,$$
$$(16^{\text{bis}}.)\qquad \lambda'(am + bn) + \lambda n < 0; \quad (\lambda u_\mu + \lambda' t_\mu)(am + bn) + (\lambda t_\mu + \lambda' t u_\mu D) n \geqq 0.$$

On aura alors

$$\frac{1}{2}\Theta(a, b, c; \xi, \eta) = \Sigma q^{a'm'^2+2b'm'n'+c'n'^2} z^{\xi'm'+\eta'n'} - \Sigma q^{a'm'^2+2b'm'n'+c'n'^2} z^{\xi'm'+\eta'n'}$$

où m' et n' satisfont sous le 1er signe Σ aux inégalités

$$(17.)\qquad \gamma m' + \delta n' \geqq 0, \quad a u_\mu(\alpha m' + \beta n') + (t_\mu + b u_\mu)(\gamma m' + \delta n') < 0$$

et sous le 2d signe Σ aux inégalités (17^{bis}.) opposées à (17.), comme (15^{bis}.) et (16^{bis}.) le sont à (15.) et à (16.).

Changeons dans les inégalités (16.) a et b en a' et b', m et n en m' et n' et cherchons ensuite à identifier les inégalités (16.) ainsi modifiées avec les inégalités (17.); il viendra

$$(18.)\qquad \begin{cases} \lambda' a' = \gamma, \ \lambda' b' + \lambda = \delta; \quad \lambda a' = a\alpha + b\lambda' a', \\ \lambda b' + \lambda' D = a\beta + b\delta. \end{cases}$$

Il s'agit de savoir si l'on peut trouver des valeurs de λ et λ' satisfaisant aux équations (18.); or en éliminant λ et λ' entre ces équations on trouve

$$(19.)\qquad \begin{cases} b'\gamma + a\alpha + b\gamma = \delta a', \\ c'\gamma + a\beta + b\delta = \delta b' \end{cases}$$

que l'on peut remplacer par l'équation unique

$$(20.)\qquad am + bn = \delta(a'm' + b'n') - \gamma(b'm' + c'n').$$

Or de l'identité

$$F = am^2 + 2bmn + cn^2 = a'm'^2 + 2b'm'n' + c'n'^2$$

on déduit par différentiation

$$\frac{dF}{dm} = \delta \frac{dF}{dm'} - \gamma \frac{dF}{dn'}$$

ce qui vérifie l'équation (20.).

Les inégalités (17.) et (17^{bis}.) sont donc bien de la forme des inégalités (16.) et (16^{bis}.) modifiées, de sorte que l'on aura

$$\Theta(a, b, c; \xi, \eta) = \Theta(a', b', c'; \xi', \eta')$$

si l'on a

$$\xi \equiv \xi', \ \eta \equiv \eta' \pmod p.$$

On voit que Θ ne change pas quand on change a, b, c en a', b', c'. Or c'est ce qui arrivera toutes les fois que

$$(21.)\qquad \alpha \equiv \delta \equiv 1, \ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod p.$$

Les congruences (21.) définissent un sous-groupe (Kongruenzgruppe) du groupe des transformations linéaires à coëfficients entiers et l'analyse qui précède montre que $\Theta_\mu(x, y)$ est un invariant *pour ce sous-groupe.*

Nous ne pouvons pas retrouver ainsi notre invariant $F(q)$ et pour 'obtenir il faut avoir recours à d'autres considérations. Voyons d'abord quelle relation il y a entre la fonction théta-elliptique de *Jacobi:*

$$\Theta(x) = \Sigma\, q^{m^2} e^{imx} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ou

$$\Theta(x) = 1 + 2\,\Sigma\, q^{m^2} \cos mx \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

et la fonction de *Fredholm:*

$$\varphi(x) = \Sigma\, q^{m^2} e^{imx}. \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nous pouvons d'abord poser:

$$2\varphi(x) = 1 + \Theta(x) + i\psi(x)$$

où

$$\psi(x) = 2\,\Sigma\, q^{m^2} \sin mx. \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Rappelons maintenant que

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$$

avec le signe + si a est positif et le signe − si a est négatif.

Considérons alors l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z}[\Theta(x-z) - \Theta(x+z)] = 4\,\Sigma \int q^{m^2} \sin mx \sin mz \frac{dz}{z}.$$

Elle donne

$$\pi\psi(x) = \int_0^\infty \frac{dz}{z}[\Theta(x-z) - \Theta(x+z)].$$

Inversement on a

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z}[\psi(x+z) - \psi(x-z)] = 4\,\Sigma \int q^{m^2} \sin mz \cos mx \frac{dz}{z}$$

d'où

$$\pi\Theta(x) = \pi + \int_0^\infty \frac{dz}{z}[\psi(x+z) - \psi(x-z)].$$

C'est une formule analogue que nous allons appliquer ici.

Posons

$$x = e^{i\xi}, \quad y = e^{i\eta}$$

d'où

$$\Theta(x, y) = 2\,\Sigma\, q^A e^{i(m\xi+n\eta)} - 2\,\Sigma\, q^A e^{-i(m\xi+n\eta)}; \quad A = am^2 + 2bmn + cn^2$$

m et n satisfaisant aux inégalités définies plus haut; je préfère écrire:

$$\Theta(x, y) = 2H_1 + 2H_2 - 2H_3 - 2H_4$$

où H_1, H_2, H_3, H_4 représentent la somme $\Sigma q^A e^{i(m\xi+n\eta)}$ avec les conditions:

$$(22.)\quad \begin{cases} n > 0,\ aum + (t+bu)n < 0 & \text{pour } H_1 \quad (\alpha) \\ n < 0,\ aum + (t+bu)n > 0 & \text{pour } H_3 \quad (\beta) \\ n = 0,\ \qquad\qquad m > 0 & \text{pour } H_2 \quad (\gamma) \\ n < 0,\ aum + (t+bu)n = 0 & \text{pour } H_4 \quad (\delta). \end{cases}$$

Je suppose $au < 0$; dans ces conditions nous avons

$$H_1 - H_3 = 2i\Sigma q^A \sin(m\xi + n\eta)$$

m et n satisfaisant aux conditions (22.) (α). Soient alors λ et μ deux quantités choisies de façon que $\lambda m + \mu n$ soit positif toutes les fois que m et n satisfont à (22α.). Posons

$$\xi = \lambda z,\quad \eta = \mu z,$$

il viendra

$$(23.)\qquad \int_0^\infty (H_1 - H_3)\frac{dz}{z} = i\pi\,\Sigma q^A.$$

Nous avons d'autre part

$$H_2 = \Sigma q^{am^2} e^{im\xi}, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$
$$H_4 = \Sigma q^{am'^2} e^{-im'\xi'} \qquad (m' = 1, 2, \ldots)$$

avec

$$\xi' = (t + bu)\xi - au\eta.$$

Peut-on choisir λ et μ de telle sorte que $\xi' = \xi$? Evidemment oui, il suffit de prendre

$$(24.)\qquad \lambda = (t + bu)\lambda - au\mu.$$

Quand λ et μ sont choisis de façon à satisfaire à cette équation, l'expression $\lambda m + \mu n$ ne peut s'annuler que pour une certaine valeur du rapport $\frac{m}{n}$, ou si nous revenons à notre représentation géométrique, quand notre point représentatif est sur une certaine droite passant par l'origine. Que cette droite n'est pas à l'intérieur de l'angle ω_0, c'est ce qui est évident, puisque l'équation (23.) exprime précisément que $\lambda m + \mu n$ a même valeur en deux points correspondants des deux côtés de l'angle ω_0. Donc $\lambda m + \mu n$ conservera toujours le même signe à l'intérieur de cet angle, c'est-à-dire quand

m et n satisfont aux inégalités (2.), ou si l'on préfère aux conditions (22α.) ou (22γ.). Nous pourrons choisir λ et μ de façon que ce signe constant soit le signe $+$.

Dans ces conditions les équations (23.) et (24.) seront vraies à la fois, et nous pourrons écrire

$$H_2 - H_4 = 2i\Sigma q^{am^2} \sin m\xi$$

d'où

$$\int_0^\infty (H_2 - H_4) \frac{dz}{z} = i\pi \Sigma q^{am^2}$$

ou enfin

$$\int_0^\infty \Theta(e^{i\lambda z}, e^{i\mu z}) \frac{dz}{z} = 2i\pi \Sigma q^A + 2i\pi \Sigma q^{am^2}.$$

Dans le calcul de A, il faut donner à m et à n toutes les valeurs satisfaisant aux conditions (22α.); on voit alors que $\Sigma q^A + \Sigma q^{am^2}$ c'est notre invariant $F(q)$; on a donc

$$\int_0^\infty \Theta(e^{i\lambda z}, e^{i\mu z}) \frac{dz}{z} = 2i\pi F(q)$$

et c'est là la relation cherchée entre la fonction $\Theta(x, y)$ et l'invariant arithmétique de *Lejeune-Dirichlet.*