MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES PAR LA MÉTHODE DE LAPLACE;

PAR H. POINCARÉ.

Introduction; choix de l'époque.

Bien que la méthode de Laplace soit tombée dans un injuste discrédit, elle me paraît présenter certains avantages dont le principal est la facilité de se servir de plus de trois observations; c'est ce qui me détermine à publier quelques réflexions qu'elle m'inspire.

J'emploierai les notations suivantes.

J'appellerai X, Y, Z les coordonnées héliocentriques de la Terre; x, y, z celles de la planète; ρ la distance Terre-Planète; ξ, η, ζ les cosinus directeurs du rayon vecteur Terre-Planète, de telle façon que les coordonnées géocentriques de la planète seront $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$ et que l'on aura

$$x = X + \rho\xi, \qquad y = Y + \rho\eta, \qquad z = Z + \rho\zeta.$$

J'appellerai r la distance Soleil-Planète et R la distance Soleil-Terre.

Le mouvement de la Terre étant connu, X, Y, Z, R peuvent être regardés comme connus ainsi que leurs dérivées des différents ordres. On observe ξ, η, ζ à trois époques et l'on trouve

$$\begin{array}{llll}
\text{A l'époque } t_1 : & \xi = \xi_1, & \eta = \eta_1, & \zeta = \zeta_1, \\
\text{A l'époque } t_2 : & \xi = \xi_2, & \eta = \eta_2, & \zeta = \zeta_2, \\
\text{A l'époque } t_3 : & \xi = \xi_3, & \eta = \eta_3, & \zeta = \zeta_3 \ (^1).
\end{array}$$

Des trois valeurs de ξ, on déduit par interpolation la valeur de ξ et celles de ses deux premières dérivées ξ' et ξ'' à une certaine époque t; et l'on fait de même pour η et pour ζ.

---

(1) Plus généralement nous affecterons de l'indice 1, 2 ou 3 les valeurs des diverses quantités aux époques t_1, t_2 ou t_3; ainsi X_1 ou ρ_1 représentera la valeur de X ou de ρ pour $t = t_1$.

Les formules d'interpolation nous donnent

$$(1)\quad \xi = \xi_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \xi_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + \xi_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}.$$

On voit que ξ se présente sous la forme d'un polynome du second degré en t, de sorte que ξ' se réduira à un polynome du premier degré, et ξ'' à une constante.

Quelle est l'erreur commise par l'emploi des formules (1)? La partie la plus importante est évidemment celle qui provient des termes du troisième ordre en t qui sont les premiers termes négligés.

La formule (1) nous donne l'unique polynome du second degré qui prend les valeurs ξ_1, ξ_2, ξ_3 pour $t = t_1$, $t = t_2$, $t = t_3$. Si nous voulions satisfaire à ces mêmes conditions par un polynome du troisième degré, il faudrait ajouter à la formule (1) un polynome du troisième degré, s'annulant pour $t = t_1$, $t = t_2$, $t = t_3$; ce polynome serait évidemment de la forme

$$\frac{\xi'''}{6} \Pi$$

en désignant par ξ''' la dérivée troisième de ξ et en posant

$$\Pi = (t-t_1)(t-t_2)(t-t_3).$$

Ainsi l'erreur commise sur ξ sera sensiblement $\frac{\xi'''}{6}\Pi$, l'erreur commise sur ξ' sera sensiblement $\frac{\xi'''}{6}\Pi'$ et l'erreur commise sur ξ'' sera sensiblement $\frac{\xi'''}{6}\Pi''$.

Les époques des observations sont très voisines et l'époque t doit être choisie voisine des observations; donc t, t_1, t_2, t_3 sont très petites. Or Π est homogène du troisième ordre, Π' et Π'' homogènes du deuxième et du premier ordre par rapport à ces quatre quantités.

Donc l'erreur sur ξ est du troisième ordre, l'erreur sur ξ' du deuxième ordre, l'erreur sur ξ'' du premier ordre.

Quel est le meilleur choix à faire pour l'époque t? On prend ordinairement l'époque de l'observation moyenne, de sorte que l'erreur commise sur ξ est nulle.

Mais il vaudrait mieux choisir t de telle façon que $\Pi'' = 0$, c'est-à-dire prendre la moyenne arithmétique des époques des trois observations

$$t = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3).$$

Il vaut mieux sacrifier l'erreur sur ξ qui est du troisième ordre à l'erreur sur ξ'' qui est du premier ordre. Les deux avantages sont réunis quand les observations sont équidistantes, mais on n'observe pas quand on veut, on observe quand on peut.

Nous supposerons donc toujours que t a été choisi pour que Π'' soit nul. Dans ces conditions l'erreur sur ξ'' s'abaisse au deuxième ordre; si nous voulons l'évaluer, il faut tenir compte des termes du quatrième degré en t; si nous voulons satisfaire aux observations par un polynome du quatrième degré, il faut ajouter à la formule (1) un polynome

$$\left(\frac{\xi^{\text{IV}}}{24} t + \alpha\right)\Pi,$$

où ξ^{IV} est la dérivée quatrième de ξ, et α une constante. L'erreur commise sur ξ'' est la dérivée seconde de cette expression, c'est-à-dire (puisque Π'' est nul)

$$\frac{\xi^{\text{IV}}}{12}\Pi'.$$

Ainsi donc, si nous appelons $\delta\xi$, $\delta\xi'$, $\delta\xi''$ les corrections à apporter à ξ, ξ', ξ'', nous aurons (*en négligeant les termes du troisième ordre*)

$$(2) \qquad \delta\xi = 0, \qquad \delta\xi' = \frac{\xi'''}{6}\Pi', \qquad \delta\xi'' = \frac{\xi^{\text{IV}}}{12}\Pi'.$$

I. — Première approximation.

En égalant les deux valeurs de l'accélération, on obtient les équations

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \rho''\xi + 2\rho'\xi' + \rho\xi'' &= \frac{X}{R^3} - \frac{x}{r^3}, \\ \rho''\eta + 2\rho'\eta' + \rho\eta'' &= \frac{Y}{R^3} - \frac{y}{r^3}, \\ \rho''\zeta + 2\rho'\zeta' + \rho\zeta'' &= \frac{Z}{R^3} - \frac{z}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Comme il ne s'agit encore ici que d'un développement analytique et que nous ne nous proposons pas pour le moment de mettre les formules sous une forme immédiatement accessible au calcul, nous avons supposé que les unités aient été choisies de façon que la constante de Gauss soit égale à 1.

Ajoutons les équations (3) après les avoir multipliées par les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' \\ \eta & \eta' \\ \zeta & \zeta' \end{vmatrix},$$

il viendra

$$\rho\,|\xi\,\xi'\,\xi''| = |\xi\,\xi'\,X|\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right). \tag{4}$$

Je n'écris que la première ligne de chaque déterminant; j'écris par exemple

$$|\xi\xi'\xi''|$$

au lieu de

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix}.$$

L'équation (4) peut être jointe à l'équation

$$r^2 = \rho^2 - 2R\rho\cos T + R^2, \tag{5}$$

où T est l'angle sous lequel on voit de la Terre la distance du Soleil à la planète, de sorte que

$$R\cos T = X\xi + Y\eta + Z\zeta.$$

Je n'ai pas à rappeler ici comment les deux équations (4) et (5) permettent de déterminer ρ et r; comment on peut les ramener soit à la forme d'une équation unique du septième degré en ρ, soit à la forme

$$M\sin^4 z = \sin(z + \omega).$$

Il est aisé de voir quelle est l'interprétation géométrique de l'équation (4); il suffit de choisir des axes particuliers, de prendre pour axe des x le rayon vecteur Terre-planète et faire passer le plan des xy par la vitesse relative de la planète par rapport à la Terre.

Dans ces conditions, on a

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$
$$\xi' = 0, \qquad \eta' = v, \qquad \zeta' = 0,$$
$$\xi'' = -v^2, \qquad \eta'' = \frac{dv}{dt}, \qquad \zeta'' = v^2 \operatorname{tang}\alpha,$$

où v désigne la vitesse du point ξ, η, ζ sur la sphère céleste; tandis que α représente l'angle du rayon vecteur avec le plan osculateur à la trajectoire de ce point ξ, η, ζ, de telle façon que le rayon de courbure de cette trajectoire est égal à $\cos\alpha$.

Si nous appelons de plus φ l'angle du plan PTS avec le plan des xy, l'équation (4) pourra s'écrire

$$\rho v^2 \operatorname{tang}\alpha = R \sin T \cos\varphi\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right).$$

Reprenons maintenant les équations (3) et ajoutons-les après les avoir multipliées par les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} X & \xi \\ Y & \eta \\ Z & \zeta \end{vmatrix},$$

il viendra

$$(6) \qquad 2\rho'|\xi\xi'X| + \rho|\xi\xi''X| = 0.$$

Avec les axes particuliers que nous supposions tout à l'heure, elle s'écrirait

$$2\rho' v + \rho\left(\frac{dv}{dt} - v^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\varphi\right) = 0.$$

Ajoutons enfin les équations (3) après les avoir multipliées par ξ, η, ζ, il viendra

$$\rho'' + \rho\Sigma\xi\xi'' = \frac{\rho}{r^3} + \Sigma\xi X\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right).$$

Rappelons en effet que, ξ, η, ζ étant des cosinus directeurs, le point ξ, η, ζ décrit une courbe sphérique, de sorte que l'on a

$$(7) \qquad \Sigma\xi^2 = 1, \qquad \Sigma\xi\xi' = 0, \qquad \Sigma\xi'^2 + \Sigma\xi\xi'' = 0.$$

Calcul des éléments.

Ayant ainsi calculé, en première approximation, ρ, ρ' et ρ'', il est aisé d'en déduire les valeurs des éléments; nous avons d'abord

$$x = X + \rho\xi,$$

ce qui montre que les coordonnées héliocentriques sont des polynomes du premier degré en ρ.

Quant aux vitesses, on a

$$x' = X' + \rho\xi' + \rho'\xi,$$

X', ξ' et ξ sont connus. Donc x' est un polynome du premier degré en ρ et ρ', et, comme le rapport de ρ' à ρ est connu par l'équation (6), c'est un polynome du premier degré en ρ.

Le carré de la vitesse $x'^2 + y'^2 + z'^2$ est évidemment égal à

$$\Sigma X'^2 + 2\rho\Sigma X'\xi' + 2\rho'\Sigma X'\xi + \rho^2\Sigma\xi'^2 + \rho'^2;$$

c'est donc un polynome du deuxième degré en ρ.

Les équations (4) et (5) nous donnent $\frac{1}{r^3}$ et r^2 sous la forme de deux polynomes du premier et du deuxième degré en ρ; donc $\frac{1}{r}$ est un polynome du troisième degré.

L'équation des forces vives

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\Sigma x'^2 \tag{8}$$

montre alors que $\frac{1}{a}$ (a étant le grand axe) est un polynome du troisième degré en ρ.

Les constantes des aires qui déterminent le plan de l'orbite et le paramètre

$$c = yz' - zy', \qquad c' = zx' - xz', \qquad c'' = xy' - yx' \tag{9}$$

apparaissent comme des polynomes du deuxième degré en ρ.

Pour avoir la longitude du périhélie, on partira des trois constantes

$$\left\{\begin{aligned} f &= -\frac{x}{r} + y'c'' - z'c', \\ f' &= -\frac{y}{r} + z'c - x'c'', \\ f'' &= -\frac{z}{r} + x'c' - y'c, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

qui se présentent sous la forme de polynomes du quatrième degré en ρ. Le vecteur dont les composantes sont f, f', f'' a même direction que le grand axe de l'orbite et est proportionnel à l'excentricité.

En résumé, toutes nos constantes sont des polynomes entiers en ρ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ξ, ξ', ξ'', η, η', η'', ζ, ζ', ζ''.

Calcul de r', x'', x''', ...

Comme r^2 est un polynome du deuxième degré en ρ,

$$r^2 = \rho^2 + 2\rho\Sigma X\xi + \Sigma X^2,$$

il vient

$$rr' = \rho\rho' + \rho(\Sigma X'\xi + \Sigma X\xi') + \rho'\Sigma X\xi + \Sigma XX',$$

ce qui montre que rr' est un polynome du deuxième degré en ρ, et, par conséquent, que $r' = \frac{1}{r}(rr')$ est un polynome du cinquième degré et que $\frac{r'}{r^2} = \frac{1}{r^3}(rr')$ est un polynome du troisième degré.

D'autre part,

$$x'' = \frac{-x}{r^3}, \qquad y'' = \frac{-y}{r^3}, \qquad z'' = \frac{-z}{r^3}$$

sont des polynomes du deuxième degré et

$$x''' = \frac{-x'}{r^3} + \frac{3xr'}{r^4} \tag{11}$$

sera aussi un polynome entier en ρ dont le degré s'élèverait à 9, mais pourrait être abaissé à 6 en se servant de l'équation du septième degré, à laquelle satisfait ρ. Mais il est plus simple d'écrire simplement

$$x''' = \frac{-x'}{r^3} + 3xrr'\frac{1}{r^5} \tag{11 bis}$$

et de remarquer que $\frac{x'}{r^3}$ et xrr' sont des polynomes du deuxième et du troisième ordre.

On a ensuite

$$x^{\text{IV}} = \frac{-x''}{r^3} + \frac{6x'r'}{r^4} + \frac{3x}{r^5}\frac{d(rr')}{dt} + 12\frac{xr'^2}{r^4}. \tag{12}$$

Nous voyons que x^{IV} se présente également sous la forme d'un polynome entier en ρ; en effet, il en est ainsi de

$$\frac{x''}{r^3} = \frac{x}{r^6}, \quad x', \quad \frac{r'}{r^4}, \quad \frac{x}{r^5}, \quad x, \quad \frac{r'}{r^2}, \quad \left(\frac{r'}{r^2}\right)^2$$

et il reste à montrer qu'il en est de même de $\dfrac{d(rr')}{dt}$; or, on trouve

$$\frac{drr'}{dt} = \frac{d}{dt}\,\Sigma xx' = \Sigma xx'' + \Sigma x'^2 = \frac{\Sigma x^2}{r^3} + \Sigma'^2 = \frac{1}{r} + \Sigma x'^2 = \frac{1}{2a} + \frac{3}{2}\,\Sigma x'^2,$$

on voit que $\dfrac{drr'}{dt}$ est un polynome du troisième degré en ρ.

Calcul de ξ''' et ξ^{IV}.

En différentiant les équations (7) et (3), on trouve

$$\Sigma\xi\xi''' = -3\,\Sigma\xi'\xi'' \tag{13}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \rho'''\xi + 3\rho''\xi' + 3\rho'\xi'' + \rho\xi''' &= x''' - \mathrm{X}''', \\ \rho'''\eta + 3\rho''\eta' + 3\rho'\eta'' + \rho\eta''' &= y''' - \mathrm{Y}''', \\ \rho'''\zeta + 3\rho''\zeta' + 3\rho'\zeta'' + \rho\zeta''' &= z''' - \mathrm{Z}'''. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Les seconds membres sont connus, grâce à l'équation (11); ce sont des polynomes entiers en ρ. Si nous multiplions les équations (14) par ξ, η, ζ et que nous ajoutions, il vient, en tenant compte de (13),

$$\rho''' = -3\rho'\Sigma\xi\xi'' + 3\rho\Sigma\xi'\xi'' + \Sigma\xi x''' - \Sigma\xi\mathrm{X}'''. \tag{15}$$

Remarquons qu'en vertu des équations (11), l'expression $\Sigma\xi x'''$ qui figure dans le deuxième membre de (15) peut s'écrire

$$\Sigma\xi x''' = \frac{1}{r^3}\,\Sigma\xi x' - \frac{3r'}{r^4}\,\Sigma\xi x = \frac{1}{r^3}\,\Sigma\xi\mathrm{X}' - \frac{3r'}{r^4}\,\Sigma\xi\mathrm{X} + \frac{\rho'}{r^3} - \frac{3r'\rho}{r^4},$$

de sorte que $r^2\Sigma\xi x'''$ et, par conséquent, $r^2\rho'''$ se présente sous la forme d'un polynome du quatrième degré en ρ.

Une fois ρ''' déterminé, les équations (14) donneront ξ''', η''', ζ''' sous la forme de polynomes entiers en ρ.

Différentions une fois encore les équations (13) et (14), il viendra

$$\Sigma\xi\xi^{\text{IV}} = -4\Sigma\xi'\xi''' - 4\Sigma\xi''^2 \tag{16}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &\rho^{\text{IV}}\xi + 4\rho'''\xi' + 6\rho''\xi'' + 4\rho'\xi''' + \rho\xi^{\text{IV}} = x^{\text{IV}} - X^{\text{IV}},\\ &\rho^{\text{IV}}\eta + 4\rho'''\eta' + 6\rho''\eta'' + 4\rho'\eta''' + \rho\xi^{\text{IV}} = y^{\text{IV}} - Y^{\text{IV}},\\ &\rho^{\text{IV}}\zeta + 4\rho'''\zeta' + 6\rho''\zeta'' + 4\rho'\zeta''' + \rho\xi^{\text{IV}} = z^{\text{IV}} - Z^{\text{IV}}.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les seconds membres sont connus en vertu de l'équation (12); on conçoit donc que l'on puisse tirer ρ^{IV}, ξ^{IV}, η^{IV}, ζ^{IV} des équations (16) et (17) en les traitant comme les équations (13) et (14); les inconnues se présenteront sous la forme de fonctions rationnelles de

$$\rho; \quad \xi, \ \eta, \ \zeta; \quad \xi', \ \eta', \ \zeta'; \quad \xi'', \ \eta'', \ \zeta''$$

et ces fonctions rationnelles pourront toujours se ramener à des polynomes du sixième degré au plus en ρ dont les coefficients seront rationnels en

$$\xi, \ \eta, \ \zeta; \quad \xi', \ \eta', \ \zeta'; \quad \xi'', \ \eta'', \ \zeta''.$$

II. — Deuxième approximation.

Les valeurs de ξ, ξ', ξ'', ... ne sont qu'approximatives et les équations (2) nous font connaître les erreurs commises sur ces trois quantités; toutes les formules précédentes nous donnent

$$\rho, \ \rho', \ \rho'', \ r, \ \dots$$

et les éléments de l'orbite en fonctions de ξ, ξ', ξ'', ... Ces formules sont rigoureuses; mais, comme les valeurs de ξ, ξ', ξ'', ... qu'on y substitue, ne sont qu'approchées, les valeurs que l'on trouvera pour ρ, ρ', ... ne seront plus qu'approchées; il s'agit maintenant d'en calculer de meilleures valeurs.

Dans ce qui va suivre, nous continuerons à désigner par les notations

$$\begin{gathered}\xi, \ \xi', \ \xi'', \ \eta, \ \dots,\\ \rho, \ \rho', \ \rho'', \ r, \ x, \ \dots,\\ \frac{1}{a}, \ c, \ c', \ c'', \ \dots,\end{gathered}$$

non pas les valeurs exactes de ces diverses quantités, mais les *valeurs approchées telles que nous venons de les calculer. Les valeurs exactes seront désignées par*

$$\begin{array}{lll} \xi + \delta\xi, & \xi' + \delta\xi', & \ldots, \\ \rho + \delta\rho, & \rho' + \delta\rho', & \ldots, \\ \dfrac{1}{a} + \delta\,\dfrac{1}{a}, & c + \delta c, & \ldots. \end{array}$$

Observons que les équations (7) ne seront plus exactement satisfaites; on aura rigoureusement par exemple

$$\Sigma(\xi + \delta\xi)^2 = 1$$

et $\Sigma\xi^2$ ne sera qu'approximativement égal à 1. Mais cette circonstance ne peut nous gêner.

En effet, les formules (4), (5), (6), (8), (9), (10) sont rigoureuses, en ce sens qu'elles expriment aussi bien la relation entre les valeurs exactes de ρ, ξ, ... qu'entre les valeurs approchées de ces mêmes quantités. Si donc nous avons, par exemple,

$$\rho = \varphi(\xi, \xi', \ldots),$$

nous en déduirons

$$\delta\rho = \frac{d\varphi}{d\xi}\,\delta\xi + \frac{d\varphi}{d\xi'}\,\delta\xi' + \ldots.$$

Les valeurs de $\delta\xi$, $\delta\xi'$, $\delta\xi''$ nous sont données par les formules (2); pour calculer $\delta\rho$, δr, $\delta\rho'$ il faut calculer les corrections des trois déterminants

$$|\xi\,\xi'\,\xi''|, \quad |\xi\,\xi'\,\mathrm{X}|, \quad |\xi\,\xi''\,\mathrm{X}|$$

qui figurent dans les équations (4) et (6); on trouve sans peine

$$\delta|\xi\xi'\xi''| = \frac{\Pi'}{6}\,|\xi\xi'''\xi''| + \frac{\Pi'}{12}\,|\xi\xi'\xi^{\text{iv}}|,$$

$$\delta|\xi\xi'\mathrm{X}| = \frac{\Pi'}{6}\,|\xi\xi'''\mathrm{X}|, \qquad \delta|\xi\xi''\mathrm{X}| = \frac{\Pi'}{12}\,|\xi\xi^{\text{iv}}\mathrm{X}|.$$

Nous sommes donc conduits à calculer les quatre déterminants

$$|\xi\xi'''\xi''|, \quad |\xi\xi'\xi^{\text{iv}}|, \quad |\xi\xi'''\mathrm{X}|, \quad |\xi\xi^{\text{iv}}\mathrm{X}|.$$

Nous nous servirons pour cela des équations (14) et (17).

Ajoutons les équations (14) après les avoir multipliées par les mineurs de la matrice

$$\left|\begin{array}{cc} \xi & \xi'' \\ \eta & \eta'' \\ \zeta & \zeta'' \end{array}\right|,$$

il viendra

$$(18) \qquad 3\rho''|\xi\xi'\xi''| + \rho|\xi\xi'''\xi''| = |\xi x'''\xi''| - |\xi X'''\xi''|.$$

Il faut donc calculer les deux déterminants

$$|\xi\xi''x'''| \quad \text{et} \quad |\xi\xi''X'''|$$

qui figurent dans le deuxième membre de (18). Or l'équation (11) nous donne

$$\frac{1}{r^3}|\xi\xi''x'| - \frac{3r'}{r^4}|\xi\xi''x| = |\xi\xi''x'''|$$

et l'on a

$$|\xi\xi''x| = |\xi\xi''X|,$$
$$|\xi\xi''x'| = |\xi\xi''X' + \rho'\xi + \rho\xi'| = |\xi\xi''X'| + \rho|\xi\xi''\xi'|$$

et de même

$$|\xi\xi''X'''| = \frac{1}{R^3}|\xi\xi''X'| + \frac{\rho}{R^3}|\xi\xi''\xi'| - \frac{3R'}{R^4}|\xi\xi''X|.$$

On trouve donc finalement

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho|\xi\xi'''\xi''| = |\xi\xi''X'|\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) + |\xi\xi'\xi''|\left(\frac{\rho}{r^3} - \frac{\rho}{R^3} - 3\rho''\right) \\ + 3|\xi\xi''X|\left(\frac{r'}{r^4} - \frac{R'}{R^4}\right). \end{aligned} \right.$$

Calculons maintenant $|\xi\xi'\xi^{\text{IV}}|$ et pour cela ajoutons les équations (17) après les avoir multipliées par les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' \\ \eta & \eta' \\ \zeta & \zeta' \end{vmatrix},$$

il viendra

$$(20) \qquad 6\rho''|\xi\xi'\xi''| + 4\rho'|\xi\xi'\xi'''| + \rho|\xi\xi'\xi^{\text{IV}}| = |\xi\xi'x^{\text{IV}}| - |\xi\xi'X^{\text{IV}}|.$$

Nous avons à calculer

$$|\xi\xi'\xi'''|, \quad |\xi\xi'x^{\text{IV}}|, \quad |\xi\xi'X^{\text{IV}}|,$$

nous trouvons, en vertu de (12),

$$|\xi\xi'x^{\text{IV}}| = \left(\frac{1}{r^6} - \frac{3}{r^5}\frac{dr r'}{dt} + \frac{12r'^2}{r^4}\right)|\xi\xi'x| - \frac{6r'}{r^4}|\xi\xi'x'|.$$

Pour avoir $|\xi\xi'X^{\text{IV}}|$ il suffit de remplacer dans cette formule r

par R et x par X; si nous nous rappelons d'ailleurs que

$$|\xi\xi' x| = |\xi\xi' X|,$$
$$|\xi\xi' x'| = |\xi\xi' X'|,$$

nous voyons que le second membre de (20) se réduit à

$$\left(\frac{1}{r^6} - \frac{3}{r^5}\frac{drr'}{dt} + \frac{12r'^2}{r^4} - \frac{1}{R^6} + \frac{3}{R^5}\frac{dRR'}{dt} + \frac{12R'^2}{R^4}\right)|\xi\xi' X|$$
$$-6\left(\frac{r'}{r^4} - \frac{R'}{R^4}\right)|\xi\xi' X'|,$$

ce que j'écrirai pour abréger

$$M|\xi\xi' X| + N|\xi\xi' X'|.$$

Pour avoir $|\xi\xi'\xi'''|$ il faut revenir aux équations (14) et les ajouter après les avoir multipliées par les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' \\ \eta & \eta' \\ \zeta & \zeta' \end{vmatrix};$$

on trouve ainsi

$$3\rho'|\xi\xi'\xi''| + \rho|\xi\xi'\xi'''| = |\xi\xi' x'''| - |\xi\xi' X'''|,$$

et en raisonnant comme plus haut

$$|\xi\xi' x'''| - |\xi\xi' X'''| = |\xi\xi' X'|\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) + 3|\xi\xi' X|\left(\frac{r'}{r^4} - \frac{R'}{R^4}\right).$$

Tous les termes de l'équation (20) sont ainsi connus.

Passons au calcul de

$$|\xi\xi''' X|;$$

pour cela il faut ajouter les équations (14) après les avoir multipliées par les mineurs de la matrice $|\xi X|$, ce qui donne évidemment

$$(21) \qquad 3\rho''|\xi\xi' X| + 3\rho'|\xi\zeta'' X| + \rho|\xi\xi''' X| = |\xi x''' X| - \xi X''' X|,$$

et l'on trouve d'ailleurs aisément

$$|\xi x''' X| = \frac{\rho}{r^3}|\xi\xi' X| + \frac{1}{r^3}|\zeta X' X|,$$

$$|\xi X''' X| = \frac{1}{R^3}|\xi X' X|.$$

Ainsi tous les termes de (21) se trouvent connus.

Il reste à calculer

$$|\xi\xi^{\text{IV}}X|,$$

en ajoutant les équations (17) après les avoir multipliées par les mineurs de la matrice $|\xi X|$. On trouve ainsi

$$(22)\quad 4\rho'''|\xi\xi'X| + 6\rho''|\xi\xi''X| + 4\rho'|\xi\xi'''X| + \rho|\xi\xi^{\text{IV}}X| = |\xi x^{\text{IV}}X| - |\xi X^{\text{IV}}X|.$$

En raisonnant comme plus haut, on voit que le second membre se réduit à

$$6\left(\frac{R'}{R^4} - \frac{r'}{r^4}\right)|\xi X'X| + 6\rho\left(\frac{R'}{R'^4} - \frac{r'}{r'^4}\right)|\xi\xi'X|.$$

D'autre part ρ''' est donné par l'équation (15).

Le calcul de

$$\delta|\xi\xi'\xi''|,\quad \delta|\xi\xi'X|,\quad \delta|\xi\xi''X|$$

est donc terminé et l'on voit que dans ce calcul ne s'introduisent que les déterminants contenus dans la matrice

$$(23)\qquad |\xi\xi'\xi''X'X|$$

Calcul de $\delta\rho$, δr, $\delta\rho'$.

La différentiation des équations (4) et (5) nous fournira $\delta\rho$ et δr, la première donnera

$$(24)\quad \delta\rho|\xi\xi'\xi''| + \frac{3\delta r}{r^4}|\xi\xi'X| = -\rho\delta|\xi\xi'\xi''| + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\delta|\xi\xi'X|,$$

et la seconde

$$r\delta r = \delta\rho(\rho - R\cos T),$$

de sorte que le premier membre de (24) peut être remplacé par

$$\delta\rho\left(|\xi\xi'\xi''| + \frac{3\cos P}{r^4}|\xi\xi'X|\right),$$

où P est l'angle sous lequel on voit de la planète la distance Terre-Soleil; on a eu l'occasion de calculer cet angle en résolvant l'équation fondamentale.

On obtient $\delta\rho'$ en différentiant l'équation (6), ce qui donne

$$2\delta\rho'|\xi\xi'X| + \delta\rho|\xi\xi''X| = -2\rho'\delta|\xi\xi'X| - \rho\delta|\xi\xi''X|.$$

Ainsi $\delta\rho$, $\delta\eta$ et $\delta\rho'$ s'expriment rationnellement en fonctions de

$$\rho,\quad \xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \xi',\quad \eta',\quad \zeta',\quad \zeta'',\quad \eta'',\quad \zeta'',$$

et dans les coefficients des diverses puissances de ρ figurent principalement les déterminants de la matrice (23).

Correction des éléments.

Comme les éléments dépendent de x, y, z, x', y', z', il faut, pour avoir les corrections des éléments, calculer d'abord les corrections

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z,\quad \delta x',\quad \delta y',\quad \delta z'.$$

Or on trouve

$$x = \mathrm{X} + \rho\xi; \qquad x' = \mathrm{X}' + \rho\xi' + \rho'\xi;$$

d'où

$$\delta x = \xi\,\delta\rho; \qquad \delta x' = \xi'\,\delta\rho + \xi\,\delta\rho' + \rho\,\delta\xi'.$$

On a d'ailleurs

$$\rho\,\delta\xi' = \frac{\Pi'}{6}\,\rho\xi''',$$

et $\rho\xi'''$ nous est donné par l'équation (14).

Ayant les corrections δx, $\delta x'$, ..., il est aisé de calculer les corrections des éléments. On voit que ces corrections

$$\delta\,\frac{1}{a},\quad \delta c,\quad \delta f,\quad \ldots$$

se présentent sous la forme de fonctions rationnelles de

$$\rho,\quad \xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \xi',\quad \eta',\quad \zeta',\quad \xi'',\quad \eta'',\quad \zeta''.$$

Correction de l'aberration.

Je n'ai pas à parler ici des corrections dues à la parallaxe que l'on peut faire porter au début du calcul sur les coordonnées X, Y, Z; mais il convient de dire quelques mots des corrections dues à l'aberration.

En vertu de ce phénomène, ce n'est pas, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, aux époques

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3$$

que x a réellement pris les valeurs x_1, x_2, x_3, mais aux époques

$$t_1-\alpha\rho_1, \quad t_2-\alpha\rho_2, \quad t_3-\alpha\rho_3,$$

α étant une constante très petite et connue.

Reprenons notre équation fondamentale

$$x = \mathrm{X} + \rho\xi,$$

et voyons quelle en est la véritable signification; X, Y, Z sont les coordonnées de la Terre à l'instant t; x, y, z sont les coordonnées héliocentriques de la planète à l'instant $t-\alpha\rho$; ρ est la distance des deux points X, Y, Z et x, y, z; enfin ξ, η, ζ sont les cosinus directeurs observés à l'instant t et corrigés de l'aberration des fixes.

Nous aurons donc

$$x = f(t-\alpha\rho),$$

en représentant par $f(t)$ l'abscisse de la planète au temps t; nous déduirons de là

$$x' = (1-\alpha\rho')f'(t-\alpha\rho)$$
$$x'' = (1-\alpha\rho')^2 f''(t-\alpha\rho) - \alpha\rho'' f'(t-\alpha\rho),$$

ou en négligeant le carré de l'aberration

$$x'' = f''(t-\alpha\rho) - 2\alpha\rho' f'''(t-\alpha\rho) - \alpha\rho''(\mathrm{X}'+\rho\xi'+\rho'\xi),$$

et si j'observe que

$$\mathrm{X}'' = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}^3}, \qquad f''(t-\alpha\rho) = \frac{f(t-\alpha\rho)}{r^3} = \frac{x}{r^3},$$

les équations (3) doivent être remplacées par

$$(3\ bis)\quad \rho''\xi + 2\rho'\xi' + \rho\xi'' = \frac{x}{r^3} - \frac{\mathrm{X}}{r^3} - 2\alpha\rho'\frac{x}{r^3} - \alpha\rho''(\mathrm{X}'+\rho\xi'+\rho'\xi),$$

avec deux autres équations qu'on en déduit par symétrie.

Si nous ajoutons ces équations après les avoir multipliées par les mineurs de

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' \\ \eta & \eta' \\ \zeta & \zeta' \end{vmatrix},$$

il viendra

$$(4\ bis)\qquad \rho|\xi\xi'\xi''| = |\xi\xi'X|\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} - \frac{2\alpha\rho'}{r^3}\right) - \alpha\rho''|\xi\xi'X'|.$$

Si l'on multiplie les équations (3 *bis*) par les mineurs de

$$\begin{vmatrix} X & \xi \\ Y & \eta \\ Z & \zeta \end{vmatrix},$$

il vient

$$(6\ bis)\qquad 2\rho'|\xi\xi'X| + \rho|\xi\xi''X| = -\alpha\rho''|X\xi X'| - \alpha\rho\rho''|X\xi\xi'|,$$

de sorte que, si $\delta\rho$ et $\delta\rho'$ représentent les corrections à apporter à ρ et à ρ' par suite de l'aberration, on aura

$$(4\ ter)\qquad \delta\rho|\xi\xi'\xi''| = -\frac{2\alpha\rho'}{r^3}|\xi\xi'X| - \alpha\rho''|\xi\xi'X'|,$$

$$(6\ ter)\qquad 2\,\delta\rho'|\xi\xi'X| + \delta\rho|\xi\xi''X| = \alpha\rho''|\xi XX'| - \alpha\rho\rho''|\xi\xi'X|.$$

Inutile d'ajouter que, dans les seconds membres de (4 *ter*) et (6 *ter*), on peut remplacer r, ρ, ρ', ρ'' par leurs premières valeurs approchées.

Dans le calcul des éléments, il faut prendre pour x et x' les valeurs $f(t-\alpha\rho)$ et $f'(t-\alpha\rho)$; on obtiendra de la sorte les éléments d'une planète fictive, en retard sur la planète réelle d'une quantité constante $\alpha\rho$. Tous les éléments seront les mêmes pour les deux planètes, sauf l'époque du passage au périhélie pour laquelle la différence sera $\alpha\rho$.

On aura donc

$$x = X + \rho\xi, \qquad x' = X' + \rho\xi' + \rho'\xi,$$

où ρ et ρ' doivent être remplacés par leurs valeurs corrigées, ce qui donne

$$x = X + (\rho + \delta\rho)\xi,$$
$$x' = X' + (\rho + \delta\rho)\xi' + (\rho' + \delta\rho')\xi;$$

en négligeant le carré de l'aberration, on trouve

$$f'(t-\alpha\rho) = x' + \alpha\rho' x',$$

d'où

$$f(t-\alpha\rho) = X + \rho\xi + \xi\,\delta\rho,$$
$$f'(t-\alpha\rho) = X' + \rho\xi' + \rho'\xi + \xi'\,\delta\rho + \xi\,\delta\rho' + \alpha\rho' x'.$$

Si l'on avait négligé l'aberration, on aurait eu simplement dans les seconds membres $X + \rho\xi$, $X' + \rho\xi' + \rho'\xi$; si donc on désigne par δx et $\delta x'$ les corrections qu'il convient d'apporter à x et à x' pour tenir compte de l'aberration, on trouve

$$\begin{aligned}\delta x &= \xi\,\delta\rho,\\ \delta x' &= \xi'\,\delta\rho + \xi\,\delta\rho' + \alpha\rho' x'.\end{aligned}$$

On remplacera $\delta\rho$ et $\delta\rho'$ par leurs valeurs tirées de (4 *ter*) et (6 *ter*), et ρ' et x' par leurs premières valeurs approchées.

Ayant les corrections de δx et de $\delta x'$ on en déduira aisément les variations des éléments; ainsi, pour le grand axe, on aura par exemple

$$\delta\,\frac{1}{2a} = \frac{-\delta r}{r^2} - \Sigma\,x'\,\delta x'$$

avec

$$r\,\delta r = (\rho - R\cos T)\,\delta\rho$$

et

$$\Sigma\,x'\,\delta x' = \frac{1}{2}\,\rho\,\delta\rho\Sigma\xi'^2 + \frac{1}{2}\,\rho'\,\delta\rho' + \delta\rho\Sigma\,X'\xi' + \delta\rho'\,\Sigma\,X'\xi + \alpha\rho'\,\Sigma\,x'^2.$$

On voit le rôle que jouent encore ici les déterminants de la matrice

$$|\xi\xi'\xi''XX'|.$$

En ce qui concerne la correction de parallaxe, appelons X, Y, Z les coordonnées du centre de la Terre, $X + \delta X$, $Y + \delta Y$, $Z + \delta Z$ celles du lieu d'observation; la première chose à faire est de calculer, pour l'époque choisie, les valeurs de δX, $\delta X'$, $\delta X''$; on a facilement δX_1, δX_2, δX_3, c'est-à-dire les projections sur l'axe des x du rayon vecteur qui va du centre de la Terre au lieu d'observation aux époques des trois observations.

On en déduit *par interpolation* δX, $\delta X'$ et $\delta X''$ de la même façon qu'on a déduit ξ, ξ' et ξ'' de ξ_1, ξ_2 et ξ_3. Il faut bien se garder de calculer ces quantités en partant des lois de la rotation de la Terre; d'abord cela n'a aucun sens quand les observations ont été faites dans des observatoires différents, et, quand même elles auraient eu lieu dans un même observatoire, l'orientation du rayon de la Terre qui va à cet observatoire a varié beaucoup dans l'intervalle de deux observations consécutives, et les positions successives qu'il a pu occuper dans cet intervalle ne nous importent évidemment en aucune façon. En opérant autrement que par interpolation on pourrait être conduit à de graves erreurs.

Quoi qu'il en soit, les équations (3) deviennent

$$\rho''\xi + 2\rho'\xi' + \rho\xi'' = \frac{x}{r^3} - \frac{X}{R^3} - \delta X''$$

avec

$$x = X + \delta X + \rho\xi, \qquad r^2 = \rho^2 - 2(R + \delta R)\cos T + (R + \delta R)^2$$

$$R\,\delta R = X\,\delta X + Y\,\delta Y + Z\,\delta Z$$

et les équations (4) et (6) deviennent

$$(4\ bis) \qquad \rho|\xi\xi'\xi''| = |\xi\xi' X|\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) + |\xi\xi'\,\delta X|\,\frac{1}{r^3} - |\xi\xi'\,\delta X''|,$$

$$(6\ bis) \qquad 2\rho'|\xi\xi' X| + \rho|\xi\xi'' X| = \frac{1}{r^3}\,|\xi\,\delta X X| - |\xi\,\delta X'' X|.$$

Dans les premiers membres de (4 *bis*) et (6 *bis*), ρ et ρ' représentent les valeurs *corrigées,* il conviendrait donc d'y remplacer ρ et ρ' par $\rho + \delta\rho$, $\rho' + \delta\rho'$. Si, des équations (4 *bis*) et (6 *bis*) ainsi modifiées, nous retranchons les équations (4) et (6), il viendra

$$\delta\rho|\xi\xi'\xi''| = |\xi\xi'\,\delta X|\,\frac{1}{r^3} - |\xi\xi'\,\delta X''|,$$

$$2\,\delta\rho'|\xi\xi' X| + \delta\rho|\xi\xi'' X| = \frac{1}{r^3}\,|\xi\,\delta X X| - |\xi\,\delta X'' X|$$

qui nous feront connaître les corrections de ρ et ρ' dues à la parallaxe.

Comparaison des méthodes.

Si nous comparons la méthode de Laplace à celle de Gauss au point de vue de l'exactitude, nous devons distinguer ce qui concerne la première approximation et ce qui concerne les approximations suivantes.

En première approximation, nous savons que la méthode de Gauss nous donne pour les distances ρ_1, ρ_2, ρ_3 des erreurs du premier ordre si les observations ne sont pas équidistantes, et du second ordre si elles sont équidistantes; et, pour les différences $\rho_2 - \rho_1$, $\rho_3 - \rho_2$, des erreurs du second ordre si les observations ne sont pas équidistantes et du troisième ordre si elles sont équidistantes.

Au contraire, d'après ce qui précède, la méthode de Laplace nous donne pour ρ, ρ', ρ'' des erreurs du second ordre, et cela est vrai *que les observations soient ou non équidistantes*, *pourvu qu'on choisisse pour époque*

$$t = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}.$$

Supposons que nous prenions pour origine du temps cette époque $\frac{t_1+t_2+t_3}{3}$, nous pourrons écrire par la formule de Taylor

$$\rho_1 = \rho + \rho' t_1 + \frac{\rho''}{2} t_1^2 + \frac{\rho'''}{6} t_1^3 + \ldots.$$

Comme t_1 est du premier ordre, que l'erreur sur ρ, ρ', ρ'' est du second ordre, et que nous négligeons entièrement ρ''', nous voyons que l'erreur commise sur les

1er, 2e, 3e, 4e

termes de la série de Taylor sera respectivement d'ordre

2, 3, 4, 3.

L'erreur commise sur ρ_1 (et de même sur ρ_2 et ρ_3) sera donc du deuxième ordre.

L'erreur commise sur $\rho_1 - \rho$ (et de même sur $\rho_2 - \rho$, $\rho_3 - \rho$, $\rho_2 - \rho_1$, $\rho_3 - \rho_2$) sera du troisième ordre.

En résumé, en ce qui concerne la première approximation, la méthode de Laplace est équivalente à celle de Gauss quand les observations sont équidistantes; elle lui est supérieure quand elles ne sont pas équidistantes.

Je ne parlerai pas ici de la rapidité des calculs, qui sont presque identiques dans les deux cas. Je veux faire seulement une autre remarque. On a imaginé il y a quelque temps un certain nombre de méthodes, fondées sur le principe de Gibbs et destinées à perfectionner la méthode de Gauss (Cf. *Astr. Nachr.*, n° 3061 Fabritius; n° 3075 Vogel; n° 3159 Lorenzoni, voir *Bulletin astronomique,* t. IX, p. 42 et 134, t. X, p. 386). Toutes ces méthodes ont pour objet de tenir compte dès la première approximation des termes du quatrième ordre.

Si les observations sont équidistantes, elles nous donnent en première approximation une erreur du troisième ordre sur ρ; elles l'emportent donc sur celles de Gauss et de Laplace, mais les calculs sont plus compliqués.

Si au contraire les observations ne sont pas équidistantes, les méthodes en question gardent leurs avantages sur celle de Gauss; elles ont en effet pour résultat de permettre d'atteindre une approximation aussi grande que si les observations étaient équidistantes. Or, ce que je voulais faire observer, c'est que ce résultat est précisément celui que la méthode de Laplace nous procure à beaucoup moins de frais.

Une autre observation n'est pas sans importance. Rien n'empêcherait de commencer les approximations avec la méthode de Laplace et de les continuer avec celle de Gauss. En effet, nous venons de voir que la méthode de Laplace nous faisait connaître, non seulement ρ, ρ', ρ'', mais encore ρ_1, ρ_2, ρ_3 et cela avec une approximation toujours égale et quelquefois supérieure à celle de Gauss. Or, quand, dans la méthode de Gauss, on veut procéder à une nouvelle approximation, on prend pour point de départ les valeurs de ρ_1, ρ_2, ρ_3 trouvées dans l'approximation précédente. On pourra donc tout aussi bien prendre pour point de départ, dans la deuxième approximation de la méthode de Gauss, les valeurs de ρ_1, ρ_2, ρ_3 trouvées en première approximation par celle de Laplace.

Nous devons remarquer toutefois que, si nous calculons les trois lieux héliocentriques à l'aide des valeurs observées de ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, ..., et des valeurs ainsi calculées de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ces trois lieux ne seront pas rigoureusement dans un même plan passant par le Soleil. Cela n'aurait d'ailleurs pas très grand inconvénient; mais il serait aisé de s'en affranchir. Par le Soleil et deux de ces lieux, P_1 et P_2 par exemple, on pourrait faire passer un plan et prendre pour le troisième lieu P_3 l'intersection de ce plan avec la droite P_3T_3; l'erreur commise sur ρ_3, ou sur $\rho_3 - \rho_2$, serait encore du même ordre. Ou bien encore on pourrait prendre, pour les trois lieux P_1, P_2, P_3, les intersections des trois droites P_1T_1, P_2T_2, P_3T_3 avec le plan de l'orbite provisoire déduite des valeurs de ρ et ρ' calculées.

En ce qui concerne les approximations suivantes, nous devons encore distinguer le cas où les observations ne sont pas, et celui où elles sont équidistantes.

Dans le premier cas, l'erreur sur ρ_1 après les

$$1^{re},\quad 2^e,\quad 3^e,\quad \ldots$$

approximations sera d'ordre

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,$$

avec la méthode de Gauss, et d'ordre

$$2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots$$

avec celle de Laplace; l'avantage reste donc à la méthode de Laplace d'autant plus qu'à chaque approximation, ou tout au moins à la seconde, les calculs sont plus simples.

Au contraire, si les observations sont équidistantes, l'erreur sur ρ_1 après les

$$1^{re},\quad 2^e,\quad 3^e,\quad \ldots$$

approximations sera d'ordre

$$2,\quad 4,\quad 6,\quad \ldots$$

avec la méthode de Gauss, et d'ordre

$$2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots$$

avec celle de Laplace. L'avantage appartient donc à celle de Gauss.

Mais, pour les approximations d'ordre élevé, on peut faire beaucoup mieux encore; dans la méthode de Newton pour la résolution numérique des équations, l'ordre de petitesse de l'erreur commise, comme on le sait, croît non pas en progression arithmétique, mais en progression géométrique; il double à chaque approximation. Or il suffit de modifier très légèrement la méthode de Gauss pour lui conférer les mêmes avantages.

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les valeurs des distances P_1T_1, P_2T_2, P_3T_3 calculées dans l'approximation précédente; soient $\rho_1+\delta\rho_1$, $\rho_2+\delta\rho_2$, $\rho_3+\delta\rho_3$ les véritables valeurs de ces distances. On sait que le rapport $\frac{n_1}{\sqrt{p}}$ du triangle SP_2P_3 à la racine carrée du paramètre dépend seulement de la corde P_2P_3, de la somme des rayons vecteurs SP_2+SP_3, et du temps t_3-t_2. Ce temps est connu, et les longueurs P_2P_3, SP_2+SP_3 le seraient également si l'on connaissait ρ_2 et ρ_3; ainsi $\frac{n_1}{\sqrt{p}}$ est une fonction de ρ_2 et de ρ_3 :

$$\frac{n_1}{\sqrt{p}} = f(\rho_2, \rho_3).$$

Soit λ_1 la valeur de cette fonction f quand on remplace ρ_2 et ρ_3 par leurs valeurs approchées, antérieurement calculées; soient α_1, β_1 et γ_1 les valeurs de ces trois dérivées, par rapport à ρ_1, ρ_2, ρ_3; la première est nulle puisque la fonction en question ne dépend pas de ρ_1 et je ne l'écris que par symétrie. On aura alors sensiblement

$$\frac{n_1}{\sqrt{p}} = \lambda_1 + \alpha_1 \delta\rho_1 + \beta_1 \delta\rho_2 + \gamma_1 \delta\rho_3.$$

On opérera de même pour $\frac{n_2}{\sqrt{p}}$, $\frac{n_3}{\sqrt{p}}$; l'équation de Gauss

$$\Sigma n_i (\rho_i \xi_i + X_i) = 0$$

peut alors s'écrire, en négligeant les carrés des $\delta\rho_i$,

$$\Sigma \lambda_i (\rho_i \xi_i + X_i + \xi_i \delta\rho_i) + \Sigma(\alpha_i \delta\rho_1 + \beta_i \delta\rho_2 + \gamma_i \delta\rho_3)(\rho_i \xi_i + X_i) = 0.$$

On a ainsi trois équations linéaires en $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, $\delta\rho_3$, qui nous fournissent de nouvelles valeurs approchées des distances P_1T_1, P_2T_2, P_3T_3, et l'approximation croît en progression géométrique. Rien ne serait donc plus facile que d'assurer à la méthode de Gauss les mêmes avantages qu'à celle de Newton.

C'est d'ailleurs ce qu'a fait Gauss lui-même et les dix méthodes qu'il a développées dans les articles **120** à **129** du *Theoria Motus* sont conçues dans cet esprit.

Il n'y aurait pas à hésiter à opérer de la sorte si l'on disposait de trois observations parfaitement exactes et si l'on n'avait rien autre chose. Mais il est parfaitement inutile de chercher à pousser l'approximation plus loin que ne le comporte la précision des observations; et, quand on aura plus de trois observations, il conviendra toujours de les faire concourir toutes au résultat, et cela sera même d'autant plus important que l'on aura poussé plus loin l'approximation.

Les avantages de la méthode de Gauss seront donc ainsi souvent illusoires. Par exemple, si l'on dispose d'un certain nombre d'observations, il n'y a pas lieu d'en déduire trois lieux normaux par interpolation et de leur appliquer la méthode de Gauss. L'emploi de la méthode de Laplace est alors tout indiqué.

Il arrive aussi quelquefois qu'après avoir appliqué la méthode de Gauss sans pousser plus loin que la première approximation, on calcule le grand axe par exemple en partant des deux lieux extrêmes. Il ne faudrait pas s'imaginer qu'on obtient ainsi un résultat plus précis qu'en appliquant la méthode de Laplace et calculant le grand axe tout simplement par l'équation des forces vives. Le résultat final ne peut pas en effet être plus approché que les lieux extrêmes d'où l'on est parti.

Ces raisons me font penser que le discrédit dans lequel paraît être tombée la méthode de Laplace n'est nullement justifié. Dans ces derniers temps, deux savants, partant sans doute des mêmes considérations, ont cherché à la réhabiliter.

Ce sont MM. Harzer et Leuschner. Il semble, d'après les exemples qu'ils ont donnés, qu'ils ont obtenu des résultats très encourageants. J'aurais toutefois à faire quelques remarques. M. Harzer prend cinq observations; ayant déterminé ρ, ρ' et ρ'' en première approximation par la méthode ordinaire, il en déduit les cinq distances ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 et il s'en sert pour effectuer les corrections d'aberration et de parallaxe; il détermine de nouveau ρ, ρ', et ρ'' à l'aide des observations ainsi corrigées. Pour les dernières corrections, il prend pour inconnues les corrections ∇x, ∇y, ∇z, $\nabla x'$, $\nabla y'$, $\nabla z'$ à apporter aux trois coordonnées de la planète à l'époque et aux trois composantes de la vitesse. Les corrections des cinq ascensions droites et des cinq déclinaisons observées sont des fonctions linéaires de ces six inconnues. Nous avons donc 10 équations et 6 inconnues et l'on peut les résoudre par la méthode des moindres carrés.

M. Leuschner prend trois observations seulement; dans la correction finale, il prend quatre inconnues $\nabla\rho$, $\nabla x'$, $\nabla y'$, $\Delta z'$; l'époque choisie est celle de l'observation moyenne, de sorte que les corrections d'ascension droite et déclinaison sont nulles pour cette observation. Il reste seulement quatre équations à quatre inconnues.

Il semble qu'on perd beaucoup de temps au calcul de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, à la correction des cinq observations, et à une nouvelle application de la méthode de Laplace aux observations corrigées.

L'emploi des corrections que j'indique pour l'aberration et la parallaxe serait, je crois, beaucoup plus rapide et ne serait pas moins exact. Dans un de ses exemples, M. Leuschner est obligé de faire trois approximations successives pour l'aberration et la parallaxe; cela peut sembler surprenant au premier abord; mais, si l'on y regarde de près, on voit qu'il aurait pu facilement éviter ces tâtonnements. En effet, on reconnaît que l'influence prépondérante était celle de la parallaxe; et que l'aberration seule n'aurait pas nécessité de nouvelle approximation; or, en faisant porter la correction de parallaxe, *au début du calcul,* sur les coordonnées de la Terre, on évite comme nous l'avons vu toute espèce de tâtonnement. Quant à l'aberration, on aurait pu faire disparaître presque entièrement la difficulté, en prenant pour époque la planète $t - \alpha\rho$ au lieu de t ainsi que nous l'avons fait plus haut. Quoi qu'il en soit de ces points de détail, MM. Harzer et Leuschner paraissent avoir réalisé un progrès notable sur les méthodes usuelles.

Observations multiples.

La méthode de Laplace est surtout intéressante quand on dispose de plus de trois observations; disons quelques mots sur la manière de diriger l'interpolation en pareil cas.

On emploiera le procédé habituel d'interpolation. Soient donc

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_p$$

les instants des observations; on posera

$$\Pi = (t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_p).$$

On développera $\frac{\Pi'}{\Pi}$ en fraction continue sous la forme

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = X_1 + 1/X_1 + 1/X_2 + \ldots.$$

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de telle sorte que

$$P_{n+1} = P_n X_{n+1} + P_{n-1}, \qquad P_0 = 1, \qquad P_1 = X_1.$$

On aura

$$\Sigma P_m(t_i) P_n(t_i) = 0, \qquad m \gtrless n,$$

et l'on posera

$$\Sigma[P_n(t_i)]^2 = B_n.$$

Si l'on veut représenter la fonction ξ par un polynome de degré $n < p$, on posera

$$\xi = \gamma_0 P_0 + \gamma_1 P_1 + \ldots + \gamma_n P_n = F(t),$$

et l'on choisira les coefficients γ_n de façon que l'expression

$$\Sigma[\xi_i - F(t_i)]^2,$$

où les ξ_i sont les valeurs observées, soit minima. Pour cela il faut prendre

$$\gamma_k B_k = \Sigma \xi_i P_k(t_i).$$

Il reste à voir où il faut arrêter le développement, c'est-à-dire quelle valeur il faut donner à n. Il est aisé de vérifier que, si les t_i sont regardés comme quantités très petites du premier ordre, le polynome $\gamma_k P_k$ sera d'ordre k. Or, si l'on prend pour $F(t)$ un polynome d'ordre n, le premier terme négligé est

$$\gamma_{n+1} P_{n+1}.$$

L'erreur commise sur ξ est donc d'ordre $n+1$; elle est d'ordre n pour ξ' et d'ordre $n-1$ pour ξ''. L'erreur sur ξ'' s'abaisse à l'ordre n, si

$$P''_{n+1}(t) = 0.$$

C'est donc à l'aide de cette équation $P''_{n+1}(t) = 0$ que l'on devra déterminer l'*époque;* elle remplace l'équation $\Pi''(t) = 0$ qui dans le cas de trois observations nous avait donné $t = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$. Si l'on suppose $n = 2$ elle s'écrit

$$P''_3(t) = 0$$

et est alors du premier degré; si l'on pose

$$X_k = \alpha_k t + \beta_k,$$

elle nous donne

$$3t = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Si nous nous reportons alors à ce que nous avons dit plus haut au sujet des corrections à faire en deuxième approximation, on verra le rôle que joue l'expression Π'; ce rôle tient à ce que nous avons

$$\delta\xi' = \frac{\xi'''}{6}\Pi', \qquad \delta\xi'' = \frac{\xi^{\text{IV}}}{12}\Pi'.$$

Quelles sont les quantités qui vont ici jouer le même rôle; il est aisé de s'en rendre compte.

Nous aurons, en effet, en nous bornant aux termes les plus importants et en supposant $P''_3 = 0$,

$$\delta\xi' = \gamma_3 P'_3, \qquad \delta\xi'' = \gamma_4 P''_4; \qquad \xi''' = \gamma_3 P'''_3, \qquad \xi^{\text{IV}} = \gamma_4 P^{\text{IV}}_4,$$

d'où

$$\delta\xi' = \xi''' \frac{P'_3}{P'''_3}, \qquad \delta\xi'' = \xi^{\text{IV}} \frac{P''_4}{P^{\text{IV}}_4}.$$

P'''_3 et P^{IV}_4 se réduisent à des constantes indépendantes de t et l'on a d'ailleurs

$$\frac{P''_4}{P^{\text{IV}}_4} = \frac{1}{2}\frac{P'_3}{P'''_3} + \frac{P''_2}{P^{\text{IV}}_4}.$$

Ces quantités se calculent aisément en fonctions des t_i, de sorte que les méthodes précédentes restent applicables sans changement important.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'on prenait $n = 2$; plus généralement, nous avons vu que l'erreur sur ξ'' est du $n^{\text{ième}}$ ordre, et peut être représentée par $h\tau^n$, h étant une constante et τ une quantité comparable à l'intervalle des observations. On aurait donc intérêt à augmenter n si les observations étaient parfaitement précises; mais l'erreur sur ξ'' due à l'incertitude des observations peut être représentée par $\frac{h_1}{\tau^2}$, h_1 étant une constante; on devra choisir n de façon que $h\tau^n$ soit comparable à $\frac{h_1}{\tau^2}$. Si donc $\frac{h_1}{h}$ est petit, on prendra n grand, surtout si τ est sensible; si, au contraire, $\frac{h_1}{h}$ est grand, ou τ très petit, on prendra n petit.

Si l'on était conduit à prendre $n > 2$, les méthodes demanderaient quelques modifications, je n'y insisterai pas.

Conclusions.

Les méthodes que j'ai exposées plus haut succinctement ne sont pas mises au point pour le calcul pratique, mais je suis persuadé qu'il suffirait pour cela de peu d'efforts après quoi elles présenteraient un avantage notable sur les méthodes usuelles.

J'ai fait porter l'interpolation sur les cosinus directeurs ξ, η, ζ et non sur les ascensions droites et déclinaisons; on aurait évidemment pu faire le contraire, les résultats n'auraient pas été sensiblement modifiés, il semble toutefois peu rationnel de faire l'interpolation sur trois quantités quand il suffirait de le faire sur deux. Mais il ne semble pas nécessaire de calculer effectivement ξ'', η'', ζ''.

Dans le calcul de ρ, ρ', r et des corrections que l'on doit apporter à ces quantités pour tenir compte de l'aberration, de la parallaxe, ou des termes dépendant de Π', nous avons vu intervenir uniquement les déterminants de la matrice

$$|\xi\xi'\xi''XX'|. \tag{23}$$

Or, ces déterminants peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de ceux de la matrice

$$|\xi_1\xi_2\xi_3XX'|, \tag{23 bis}$$

les coefficients étant des fonctions de t_1, t_2, t_3 faciles à déterminer. On pourra donc calculer ces déterminants (23) sans calculer effectivement ξ, ξ', ξ''.

Il reste à faciliter le calcul de ces déterminants en les mettant sous une forme calculable trigonométriquement par logarithmes, et où figureront non pas les cosinus directeurs ξ_1, ξ_2, ξ_3, mais les ascensions droites et déclinaisons observées, ou bien les longitudes et les latitudes.

Je n'insisterai pas sur ce point, me bornant à faire remarquer que ces déterminants sont les mêmes qu'on rencontre dans la méthode de Gauss et que, pour les rendre calculables par logarithmes, on n'a qu'à faire ce que fait Gauss lui-même.