

# L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Electriques — Mécaniques — Thermiques

DE

## L'ÉNERGIE

### DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — A. BLONDEL, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. — ÉRIC GÉRARD, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — M. LEBLANC, Professeur à l'École des Mines. — G. LIPPMANN, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — D. MONNIER, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — H. POINCARÉ, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — A. WITZ, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

### ÉTUDE DU RÉCEPTEUR TÉLÉPHONIQUE

#### I. — RAPPEL DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Considérons un système de  $n$  circuits parcourus par des courants d'intensité  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , dont les positions dans l'espace dépendent de  $n$  paramètres  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Nous introduirons dans les calculs les vitesses de déplacement de ces circuits

$$x'_k = \frac{dx_k}{dt},$$

et les quantités d'électricité transportées par ces courants

$$q_k = \int i_k dt.$$

Soit  $T$  la force vive mécanique du système qui dépend des variables  $x$  et  $x'$ ; soit  $T'$  son énergie électrodynamique qui ne dépend que de la position des circuits et de l'intensité des courants, c'est-à-dire des variables  $x$  et  $i$ ; soit  $U$  l'énergie potentielle mécanique du système qui ne dépend que des variables  $x$ ; et enfin soit  $U'$  l'énergie électrostatique qui dépend des charges électriques  $q$  et des variables  $x$ .

Posons

$$H = T + T' - U - U'$$

et imaginons que le système soit soumis à deux groupes de forces extérieures: les unes  $\Phi$  sont des forces motrices, les autres  $F$  sont des forces de frottement; on peut les considérer comme définies par l'expression même de leur travail virtuel, savoir:

$$\Sigma(\Phi_k - F_k)\delta x_k.$$

Dans ces conditions on sait que les équations de Lagrange appliquées à ce système mécanique sont de la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial x'_k} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_k} = \Phi_k - F_k.$$

La même fonction H différenciée par rapport aux variables  $i$  et  $q$  donnera le groupe d'équations

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial i_k} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_k} = E_k - R_k i_k$$

$E_k$  désignant la force électromotrice totale placée dans le circuit et  $R_k$  la résistance ; on peut en effet considérer l'expression

$$\Sigma (E_k - R_k i_k) \delta i_k$$

comme représentant le travail virtuel des forces électriques, dont les unes  $E$  produiraient un travail moteur et les autres,  $Ri$ , un travail résistant analogue au frottement.

Ce sont là les équations établies par Maxwell dans l'hypothèse où il n'y aurait que des courants et pas d'aimants.

*Généralisation des équations de Maxwell.* — Nous allons généraliser ces équations et montrer qu'elles subsistent lorsque le système comprend des aimants permanents ou non.

Nous considérons en effet les aimants comme des circuits infiniment petits dans lesquels circulent les courants qui produisent le champ magnétique. Ces circuits sont mobiles, et c'est précisément parce qu'ils tendent à s'orienter que les corps deviennent magnétiques.

Nous désignerons par  $j_1, j_2, \dots$  les intensités de ces courants élémentaires et par  $y_1, y_2, \dots$  les variables fixant leur position dans l'espace.

Nous supposons ces circuits sans résistance, sans force électromotrice et sans capacité ; il faudra donc, dans les nouvelles équations, supposer

$$E_k = R_k = 0$$

et

$$\frac{dH}{dq_k} = 0$$

ce dernier terme provenant en effet de la capacité du circuit. En différenciant H par rapport à ces variables  $y$  et  $j$  on obtient deux nouveaux groupes d'équations.

Le troisième groupe d'équations de Maxwell est ici :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial j_k} \right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial H}{\partial j_k} = \text{constante} = p_k.$$

Quant au quatrième groupe d'équations il se simplifie également : en effet, nous supposons ces circuits élémentaires sans masse ; par suite la quantité  $T$  qui entre ici dans l'expression de H et qui représente la force vive mécanique des circuits est nulle et comme c'est la seule des quantités entrant dans H, qui dépende des variables  $y'$ , on en conclut que

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = \frac{\partial T}{\partial y'} = 0.$$

D'autre part aucune force motrice n'agit sur ce système ; donc

$$\Phi_k = 0 ;$$

enfin, nous remarquerons que la force  $F_k$  n'est autre chose ici que l'hystérésis ; comme la perte d'énergie par hystérésis est toujours très faible, nous n'en tiendrons pas compte et nous poserons

$$F_k = 0.$$

S'il y a des aimants permanents nous supposerons que les circuits élémentaires sont fixes à l'intérieur de ces aimants.

Le quatrième groupe d'équations de Maxwell prend donc la forme

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = 0.$$

Posons maintenant :

$$H' = H - \sum p_k j_k.$$

La fonction  $H$  dépendait des variables  $x, x', y, y', i, q, j$  ; au contraire on peut supposer que  $H'$  ne contient plus ni les  $y$  ni les  $j$  ; il suffit de tirer ces variables des équations

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial j_k} = p_k,$$

et de les exprimer en fonction de  $x, x', i, q$ . Il est alors facile de voir que les nouvelles équations en  $H'$  conservent la même forme que les équations en  $H$ .

En effet, soit  $\alpha$  l'une quelconque des variables  $x, i, x', q$ . Calculons

$$\frac{dH'}{d\alpha};$$

$H'$  dépend de  $\alpha$  directement et par l'intermédiaire de  $j$  et de  $y$  qui ont été remplacées par des fonctions de  $\alpha$ . Donc :

$$\frac{dH'}{d\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \sum \frac{\partial H}{\partial y_k} \times \frac{dy_k}{d\alpha} + \sum \frac{\partial H}{\partial j_k} \times \frac{dj_k}{d\alpha} - \sum p_k \frac{dj_k}{d\alpha}.$$

Or :

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial j_k} = p_k,$$

d'où

$$\frac{dH'}{d\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \alpha},$$

d'où enfin les équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial H'}{\partial x_k} &= \Phi_k - F_k, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial i_k} \right) - \frac{\partial H'}{\partial q_k} &= E_k - R_k i_k. \end{aligned}$$

On est ainsi débarrassé des variables relatives aux circuits élémentaires.

Remarquons cependant que  $H$  était un polynôme du deuxième degré par rapport aux variables  $i$ , et que par rapport à ces mêmes variables il ne contenait que des termes du second degré et des termes indépendants. Au contraire  $H'$  est une fonction quelconque des  $i$ .

*Equations des forces vives.* — Posons

$$W = \sum x'_k \frac{\partial H'}{\partial x'_k} + \sum i_k \frac{\partial H'}{\partial i_k} - H'$$

et ajoutons les équations précédentes après avoir multiplié les premières par  $dx_k$  et les secondes par  $dq_k$ . Il vient, en remarquant que  $dx_k = x'_k dt$  et que  $dq_k = i_k dt$ ,

$$\Sigma x'_k d\left(\frac{\partial H'}{\partial x'_k}\right) - \Sigma \frac{\partial H'}{\partial x_k} dx_k + \Sigma i_k d\left(\frac{\partial H'}{\partial i_k}\right) - \Sigma \frac{\partial H'}{\partial q_k} dq_k = \Sigma(\Phi_k - F_k)dx_k + \Sigma(E_k i_k - R_k i_k^2)dt.$$

On voit immédiatement que le premier membre de cette égalité n'est autre chose que  $dW$ .

Donc :

$$dW = \Sigma(\Phi_k - F_k)dx_k + \Sigma(E_k i_k - R_k i_k^2)dt.$$

Le deuxième membre est la somme des travaux des forces extérieures, des travaux des forces électromotrices et de la chaleur Joule dégagée.

Donc  $W$  représente bien l'énergie totale et la dernière équation écrite est bien l'équation généralisée des forces vives.

## II. — APPLICATION DES ÉQUATIONS AU RÉCEPTEUR TÉLÉPHONIQUE

Soit  $x$  le déplacement du centre de la membrane, soit  $i$  l'intensité du courant circulant dans la bobine.

Déterminons la fonction  $H'$ . Nous supposons qu'elle ne dépend pas de  $q$ , c'est-à-dire que nous négligerons les effets dus à la capacité.

La force vive du système est :

$$T = \frac{mx'^2}{2},$$

expression dans laquelle  $m$  ne désigne qu'une fraction de la masse de la membrane car  $x'$  représente la vitesse du centre, vitesse supérieure à celle que prennent tous les autres points de la membrane.

D'autre part  $H'$  est une fonction de  $i$  et de  $x$ , variables qui restent toujours très petites. On pourra donc remplacer  $H'$  par son développement en série par rapport aux puissances croissantes de  $i$  et de  $x$ , limité aux termes du deuxième degré. Le terme indépendant de  $i$  et de  $x$  ne nous intéresse pas, puisque  $H'$  ne figure dans les équations que par ses dérivées ; les termes du premier degré ont des coefficients nuls, car pour  $i=0$ , le système est en équilibre électrique, et nous pouvons toujours supposer que lorsque les  $x$  sont nuls il est en équilibre mécanique ; par suite

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial i}\right)_{i=x=0} = \left(\frac{\partial H'}{\partial x}\right)_{i=x=0} = 0.$$

Enfin les termes du second degré sont de la forme

$$\frac{Li^2}{2} + M'xi - \frac{kx^2}{2}$$

expression dans laquelle  $L$  caractérise la self-induction de la bobine, et  $M'$  l'attraction exercée sur la plaque par la bobine lorsque celle-ci est traversée par un courant  $i$ .

Ce coefficient s'annulerait si l'électro-aimant au repos n'était pas aimanté, et il est proportionnel au champ de l'aimant permanent : on peut s'en rendre compte facilement, en remarquant que l'énergie électrodynamique du système peut se mettre, à un facteur constant près, sous la forme

$$\int (H_0 + H_i)^2 dv$$

en désignant par  $H_0$  le champ créé par l'aimant permanent et par  $H_i$  le champ créé par le courant  $i$ , et étendant le signe  $\int$  à l'ensemble du système.

Dans cette nouvelle expression, le terme qui correspondrait à  $M'xi$  serait celui qui serait du premier degré par rapport à  $i$ , c'est-à-dire,  $\int H_0 H_i dv$ , expression qui serait bien nulle si  $H_0 = 0$ , c'est-à-dire s'il n'y avait pas d'aimant permanent.

Quant au coefficient  $k$ , il dépend essentiellement des forces qui agissent sur la plaque lorsqu'aucun courant ne passe dans la bobine, forces qui dépendent du magnétisme rémanent des noyaux ainsi que de l'élasticité de la plaque et par conséquent du mode d'encastrement des bords.

Nous verrons un peu plus loin que ce coefficient  $k$  est positif.

Donc finalement la fonction  $H'$  est de la forme :

$$H' = \frac{mx'^2}{2} + \frac{Li^2}{2} + M'xi - \frac{kx^2}{2}.$$

D'après ce que nous avons dit, l'équation de Lagrange relative au système mécanique sera :

$$mx'' - M'i + kx = \Phi - Fx';$$

$\Phi$  est ici une force motrice quelconque agissant sur la plaque. Cette force est nulle si l'appareil est récepteur ; elle représente la force due à la pression de l'air s'il s'agit d'un transmetteur.

Quant au frottement nous admettrons qu'il est proportionnel à la vitesse ; il est d'ailleurs très faible. Pour être rigoureux il faudrait y ajouter la force antagoniste due aux courants de Foucault, qui prennent naissance dans la membrane métallique. Nous les négligerons pour le moment et nous étudierons plus loin leur influence.

L'équation de Lagrange appliquée au système électrique est

$$Li' + M'x' = E - Ri$$

en posant

$$i' = \frac{di}{dt};$$

$E$  représente la force électromotrice aux bornes du téléphone ; c'est une fonction connue du temps.

Finalement, il faut intégrer le système :

$$\begin{cases} mx'' + Fx' + kx - M'i = \Phi \\ M'x' + Li' + Ri = E. \end{cases}$$

*Intégration du système.* — Ces équations sont linéaires à coefficients constants et du second ordre.

Considérons d'abord l'équation type de la forme

$$ay'' + 2by' + cy = F$$

$a, b, c$  étant des constantes et  $F$  une fonction connue du temps.

On sait que, si  $F = 0$ ,

l'équation

$$ay'' + 2by' + cy = 0$$

admet une solution particulière de la forme

$$y = e^{\omega t}$$

$\omega$  étant une racine de l'équation

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0.$$

Soit

$$\omega = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

nous dirons dans le cas actuel, où il n'y a pas de second membre, que  $\omega$  représente la période propre de l'appareil. On sait que dans ce cas  $\beta$  caractérise la période d'oscillation propre de l'appareil et  $\alpha$ , l'amortissement de cette oscillation.

Supposons maintenant que l'équation ait un second membre de la forme

$$F = e^{wt}.$$

L'équation admet la solution :

$$y = \frac{e^{wt}}{a\omega^2 + 2b\omega + c}.$$

Si  $F$  est une fonction périodique quelconque, elle peut se mettre sous la forme :

$$F = \Sigma A e^{wt}$$

les  $\omega$  étant alors des imaginaires pures, d'où

$$y = \sum \frac{A e^{wt}}{a\omega^2 + 2b\omega + c}.$$

Dans le cas actuel il faut que l'appareil rende un son non altéré et aussi intense que possible. Mathématiquement cela revient à comparer la fonction  $y$ , qui représente les vibrations de l'appareil à la fonction  $F$  qui représente la cause extérieure produisant les vibrations.

Le rapport est

$$\frac{y}{F} = \frac{1}{a\omega^2 + 2b\omega + c}.$$

Ce rapport est imaginaire puisque  $\omega$  l'est.

Son module est le rapport des modules de  $y$  et de  $F$ , c'est-à-dire le rapport des amplitudes des oscillations de  $y$  et de  $F$ ; son argument qui est la différence des arguments de  $y$  et de  $F$  représente la différence de phase de  $y$  et de  $F$ ; tout ceci se voit immédiatement en appliquant aux fonctions périodiques les représentations par vecteurs et les calculs des imaginaires.

Donc, pour que le son soit aussi intense que possible, il faut que le module de l'expression précédente soit aussi grand que possible; pour que le son ne soit pas altéré, il faut que,  $\omega$  variant dans les limites de la voix humaine, le rapport précédent varie aussi peu que possible. On peut facilement voir que ces deux conditions sont contradictoires: en effet, pour satisfaire à la première, il faudrait que le dénominateur fût très petit, c'est-à-dire que

$$a\omega^2 + 2b\omega + c$$

fût voisin de 0. Si ce polynôme était nul, il y aurait résonance et l'intensité serait maximum. Pour  $\omega$  voisin de cette période propre de l'appareil, le rapport serait très grand, mais il varierait très rapidement, et on aurait une grande altération dans les sons rendus par l'appareil; cette altération proviendrait de deux causes: des variations du module qui peuvent amener l'affaiblissement ou le renforcement de certains harmoniques et des variations de l'argument qui correspondent à des variations dans le décalage des harmoniques.

On peut construire une courbe de résonance, en prenant pour abscisse  $\omega$  qui est réel et pour ordonnée :

$$\left| \frac{y}{F} \right| = \left| \frac{1}{a\omega^2 + 2b\omega + c} \right|.$$

Si  $b = 0$  la résonance a lieu pour la valeur de  $\omega$  qui satisfait à l'équation

$$a\omega^2 + c = 0.$$

La courbe présente une asymptote verticale (fig. 1).

Si  $b \neq 0$ , il n'y a aucune valeur réelle de  $\omega i$  qui annule  $a\omega^2 + 2b\omega + c$ ; lorsque  $b$  augmente la courbe s'aplatit (fig. 2); le son s'altère de moins en moins, mais l'intensité diminue.

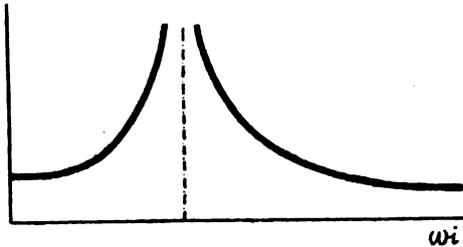


Fig. 1.

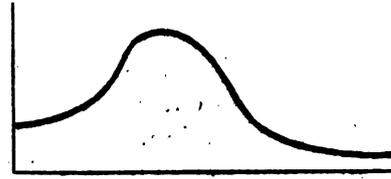


Fig. 2.

Tout ce que nous avons dit s'applique à une solution particulière de l'équation différentielle et est valable lorsque le régime est établi. Il y a une période variable pendant laquelle le phénomène s'établit, et qu'il est nécessaire d'étudier.

La solution générale de l'équation est

$$y = \sum \frac{Ae^{i\omega t}}{a\omega^2 + 2b\omega + c} + B_0 e^{\omega_0 t} + B_1 e^{\omega_1 t}$$

$\omega_0$  et  $\omega_1$  étant les racines de l'équation

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$$

$B_0$  et  $B_1$  étant deux constantes qu'on détermine en écrivant qu'à l'instant initial on a

$$y = y' = 0.$$

Ces termes en  $B_0$  et  $B_1$  constituent des sons nuisibles qui disparaissent par amortissement, car  $\omega_0$  et  $\omega_1$  ne sont pas des imaginaires pures; à ce point de vue encore, il y a intérêt à avoir un amortissement important, c'est-à-dire une grande valeur pour  $b$ .

Ceci posé, revenons à nos équations de Lagrange.

Faisons

$$E = \Phi = 0.$$

Si nous prenons pour  $x$  et  $i$  des fonctions de la forme  $e^{i\omega t}$ , nos équations pourront s'écrire :

$$\begin{cases} x(m\omega^2 + E\omega + k) - M'i = 0 \\ M'\omega x + (L\omega + R)i = 0 \end{cases}$$

et par suite  $\omega$  satisfait à l'équation :

$$(m\omega^2 + F\omega + K)(L\omega + R) - M'^2\omega = 0.$$

Pour que le mouvement soit un mouvement vibratoire, se faisant au voisinage d'une position d'équilibre stable, il faut que la partie réelle des racines de cette équation soit négative; sans quoi les solutions comprendraient des exponentielles à exposant positif et, sans aucune force extérieure,  $x$  croîtrait indéfiniment. Ceci exige  $k > 0$ ; en effet, comme le terme en  $\omega^2$  a pour coefficient  $mL > 0$ , et comme l'équation a une ou trois racines réelles qui doivent être négatives d'après ce qu'on a dit, on en conclut que le terme indépendant de  $\omega$  doit être positif. Donc

$$KR > 0$$

et par suite

$$K > 0.$$

Donc tous les coefficients sont positifs, et l'équation a trois racines réelles négatives, ou

une racine réelle négative et deux racines imaginaires dont les parties réelles sont certainement négatives.

Ces cas peuvent d'ailleurs se présenter l'un et l'autre.

### III. — APPLICATION DES ÉQUATIONS AU CAS DE DEUX APPAREILS

a) *Appareils identiques.* — Nous supposerons deux appareils semblables, par exemple deux appareils Bell réunis entre eux par une ligne très courte dont on puisse négliger la résistance et la self-induction.

Nous avons maintenant trois variables, savoir :

L'intensité du courant  $i$  ;

Les déplacements des deux membranes  $x$  et  $x_1$ .

La fonction  $H'$  relative à ce système est :

$$H' = \frac{m}{2} (x'^2 + x_1'^2) + Li^2 + M'i(x + x_1) - \frac{k}{2} (x^2 + x_1^2)$$

d'où on tire les trois équations :

$$mx'' + Fx' + kx - M'i = \Phi$$

$$mx_1'' + Fx_1' + kx_1 - M'i = \Phi_1$$

$$M'(x' + x_1') + 2Li' + 2Ri = E.$$

Nous supposerons d'ailleurs  $E = 0$ , car il n'y a pas de force électromotrice dans le circuit,

$$\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_1 \neq 0.$$

En effet aucune force mécanique n'agit sur le récepteur ; au contraire le transmetteur est soumis à la pression variable de l'air par suite des sons émis par la personne qui parle devant la plaque.

Pour trouver la période propre du système, il suffit de considérer les équations sans second membre et de supposer toutes les variables proportionnelles à  $e^{i\omega t}$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} (m\omega^2 + F\omega + k)x - M'i = 0 \\ (m\omega^2 + F\omega + k)x_1 - M'i = 0 \\ (2(L\omega + R)i + M'\omega(x + x_1)) = 0 \end{cases}$$

d'où on tire d'abord

$$x = x_1$$

et en éliminant  $x$  et  $i$  entre les deux dernières, il vient :

$$(m\omega^2 + F\omega + k)(L\omega + R) + M'\omega^2 = 0.$$

Les périodes propres sont donc les mêmes que celles des appareils considérés séparément.

b) *Téléphone et microphone.* — Appelons :

L la self du secondaire comprenant la self du récepteur et de l'enroulement secondaire du microphone ;

M le coefficient d'induction mutuelle du primaire et du secondaire du microphone ;

N la self du primaire du microphone, le secondaire étant ouvert ;

R la résistance totale de la ligne, du récepteur et du secondaire du microphone ;

R<sub>1</sub> la résistance du primaire, variable ;

S la valeur moyenne de la résistance  $R_1$ , de sorte que  $R_1 = S + r$ ,  $r$  variant suivant les vibrations de la plaque,

$i$  le courant de la ligne ;

$J$  courant dans le primaire, variable ;

$J_0$  valeur de  $J$  lorsque la plaque est au repos, de sorte que  $J = J_0 + j$ .

Nous supposons en outre  $r$  et  $j$  très petits par rapport à  $S$  et à  $J_0$ .

On a :

$$H' = \frac{mx'^2}{2} + \frac{Li^2}{2} + MiJ + \frac{NJ^2}{2} + M'ix - \frac{Kx^2}{2}$$

expression analogue à celle qui a été trouvée pour un seul récepteur téléphonique, sauf que

$$\frac{Li^2}{2}$$

est remplacé par

$$\frac{Li^2}{2} + MiJ + \frac{NJ^2}{2}.$$

Les équations de Maxwell sont :

$$mx'' + Kx - Mi = -Fx \quad (1)$$

car dans cet exemple  $\Phi = 0$ ,

$$Li + M'x' + Mj' = Ri \quad (2)$$

en remarquant que  $j' = J'$  et en observant que dans le secondaire  $E = 0$ .

Enfin

$$Mi + Nj' = E - SJ_0 - Sj - rJ_0 \quad (3)$$

car ici  $E \neq 0$ , puisqu'on dérive par rapport à la variable  $j$ , courant du primaire; on a fait le produit  $R_1J$  et on a négligé le terme  $jr$  devant les autres.

Remarquons qu'au repos on a dans le primaire du microphone

$$E = SJ_0;$$

par suite l'équation précédente s'écrit

$$Mi + Nj = -Sj - rJ_0.$$

On a ainsi le système d'équations :

$$\begin{cases} mx'' + Fx' + Kx - M'i = 0, \\ M'x' + Li' + Ri + Mj' = 0, \\ Mi + Nj + Sj = rJ_0. \end{cases}$$

Comme précédemment, on trouve la période propre du système en considérant les équations sans second membre et supposant les trois fonctions proportionnelles à  $e^{pt}$ .

On obtient les trois équations :

$$\begin{cases} (m\omega^2 + F\omega + K)x - M'i = 0, \\ M'\omega + (L\omega + R)i + M\omega j = 0, \\ M\omega i + (N\omega + S)j = 0. \end{cases}$$

L'équation donnant les périodes propres de l'appareil est :

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 + F\omega + K & -M & 0 \\ M'\omega & L\omega + R & M\omega \\ 0 & M\omega & N\omega + S \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(m\omega^2 + F\omega + K)[(L\omega + R)(N\omega + S) - M^2\omega^2] + M'^2\omega(N\omega + S) = 0. \quad (1)$$

Comme précédemment, pour que le mouvement soit périodique et reste infiniment voisin de la position d'équilibre du système, il faut et il suffit que la partie réelle des racines de cette équation soit négative. Cela exige  $K > 0$ .

En effet le coefficient du terme  $\omega^4$  est  $m(LN - M^2)$ .

Ce coefficient est positif, on peut dire par exemple que l'énergie électromagnétique est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2 + Mij + \frac{1}{2} NJ^2.$$

Par définition ce trinôme du deuxième degré à deux variables conserve un signe constant, d'où :

$$LN - M^2 > 0.$$

On peut aussi remarquer que  $L$  étant la self du système entier se compose de deux termes :

$$L = L' + L'',$$

$L'$  étant la self de la ligne et du récepteur,  $L''$  étant celle du secondaire du transmetteur.

Or la théorie des transformateurs indique que la quantité

$$L''N - M^2 > 0,$$

l'égalité ayant lieu quand le transformateur est parfait et ne présente aucune fuite magnétique ; donc certainement

$$LN - M^2 > 0.$$

Ceci posé pour que les racines réelles de l'équation soient négatives il faut que le terme indépendant de  $\omega$  soit positif :

$$KRS > 0,$$

d'où

$$K > 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car tous les coefficients étant positifs, si l'équation admet des racines réelles, elles ne peuvent être que négatives. Je dis d'ailleurs que cette équation a toujours des racines réelles :

Substituons en effet  $-\frac{S}{N}$  dans le premier membre.

Le résultat est

$$[-M^2\omega^2(m\omega^2 + F\omega + K)]_{\omega = -\frac{S}{N}}$$

Si l'équation

$$m\omega^2 + F\omega + K = 0$$

a ses racines imaginaires, ou si elles sont réelles et que  $-\frac{S}{N}$  soit extérieur à leur intervalle, le résultat de la substitution est négatif, et dans ce cas l'équation a au moins deux racines réelles.

Si, au contraire, l'équation

$$m\omega^2 + F\omega + K = 0 \tag{1}$$

a ses racines réelles, l'une supérieure, l'autre inférieure à  $-\frac{S}{N}$ , cette substitution ne donne aucun renseignement ; mais alors, substituons dans notre équation primitive (1) les racines de cette équation (2), racines certainement négatives puisque tous les coefficients de cette équation sont positifs. Le résultat de ces substitutions est

$$M^2\omega(N\omega + S).$$

Le premier facteur est négatif d'après ce qu'on vient de dire ; quant au deuxième, il donne deux résultats de signe contraire puisque  $-\frac{S}{N}$  est compris entre les deux racines de l'équation (2). Donc, dans ce cas encore il y a au moins deux racines réelles.

Il peut d'ailleurs y avoir soit deux, soit quatre racines réelles ; par exemple si  $M=0$  l'équation devient :

$$(M\omega^2 + F\omega + K)(L\omega + R)(N\omega + S) = 0$$

et cette équation a deux ou quatre racines réelles suivant que les deux racines de

$$m\omega^2 + F'\omega + K = 0$$

sont imaginaires ou réelles.

Je dis enfin que si  $K > 0$ , les racines imaginaires de l'équation (1) ont leur partie réelle négative.

Nous avons vu précédemment en effet l'expression de l'énergie totale du système :

$$W = \sum x' \frac{\partial H'}{\partial x'} + \sum i \frac{\partial H'}{\partial i} - H.$$

Dans le calcul actuel

$$H' = \frac{mx'^2}{2} + \frac{Li^2}{2} + MiJ + \frac{NJ^2}{2} + Mix - \frac{Kx^2}{2}$$

$$\text{et : } W = x' \frac{\partial H'}{\partial x'} + i \frac{\partial H'}{\partial i} + J \frac{\partial H'}{\partial J} - H' = \frac{mx'^2}{2} + \frac{Li^2}{2} + MiJ + \frac{NJ^2}{2} + \frac{Kx^2}{2};$$

on a vu également que :

$$dW = \sum (\Phi_k - F_k) dx_k + \sum (F_k i_k - R_k i_k^2) dt.$$

Comme nous étudions les oscillations propres du système, on suppose dans les équations :

$$\Phi = E = 0,$$

d'où

$$dW = F_k dx_k - R i^2 dt - S J^2 < 0.$$

Ceci posé, si l'équation en  $\omega$  avait une racine de la forme

$$\omega = \alpha + \beta \sqrt{-1}$$

avec  $\alpha > 0$  les fonctions  $x$ ,  $i$ ,  $J$  seraient proportionnelles à

$$e^{(\alpha + \beta \sqrt{-1})t}.$$

L'équation en  $\omega$  ayant ses coefficients réels admettrait aussi la solution conjuguée

$$\alpha - \beta \sqrt{-1},$$

et les fonctions  $x$ ,  $i$ ,  $J$  seraient de la forme

$$e^{\alpha t} (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t),$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant deux constantes.

En substituant dans  $W$ , il viendrait

$$W = e^{2\alpha t} (A \cos^2 \beta t + 2\beta \sin \beta t \cos \beta t + C \sin^2 \beta t).$$

La fonction entre parenthèses est périodique et ne peut s'annuler. Donc à des intervalles de temps d'une période,  $W$  augmenterait si on avait  $\alpha > 0$ .

Or, cela est impossible puisqu'on vient de voir que  $dW < 0$ .

Donc il est certain que l'on a  $\alpha < 0$ .

Ayant ainsi étudié le système sans second membre, revenons au système complet.

Il faut alors faire une hypothèse sur la résistance variable  $r$ ; nous la supposons périodique et nous poserons

$$rJ_0 = Ae^{i\omega t},$$

$\omega$  étant une imaginaire pure; nous admettons ainsi que  $r$  varie comme le son qui produit cette variation, et que celui-ci n'est pas amorti. Il faut alors étudier le phénomène pendant le régime et pendant la période variable.

Pour la période de régime, on sait que  $x, i, j$  sont proportionnels à  $e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  étant l'exposant qui figure dans la valeur  $rJ_0$ .

On aura donc le système :

$$\begin{cases} x(m\omega^2 + F\omega + K) - M'i = 0, \\ M'\omega x + (L\omega + R)i + M\omega j = 0, \\ M\omega i + (N\omega + S)j = -rJ_0. \end{cases}$$

Tirons la valeur de  $x$  de ce système. On a

$$\frac{x}{rJ_0} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Le dénominateur  $Q(\omega)$  est le déterminant formé par les coefficients des inconnues: c'est le premier membre de l'équation du quatrième degré trouvée antérieurement.

Cherchons à calculer  $P(\omega)$ .

C'est un polynôme en  $\omega$ : cherchons le coefficient du terme de plus haut degré en  $\omega$ . Il suffit de supposer  $\omega$  infiniment grand; la première équation se réduit à :

$$m\omega^2 x - M'i = 0.$$

Donc  $\frac{x}{i}$  tend vers 0 et  $x$  est négligeable devant  $i$ .

Par suite les deux dernières équations se réduisent à

$$\begin{aligned} Li + Mj &= 0 \\ (Mi + Nj)\omega &= -rJ_0. \end{aligned}$$

On tire immédiatement de ces trois équations :

$$\frac{x}{rJ_0} = \frac{MM'}{m(LN - M^2)\omega^3}.$$

D'ailleurs pour  $\omega$  infini le polynôme  $Q(\omega)$  se réduit à

$$Q(\omega) = m(LN - M^2)\omega^4$$

d'où on conclut que pour  $\omega$  infini,  $P(\omega)$  se réduit à :

$$P(\omega) = MM'\omega$$

ce qui prouve que ce polynôme est du premier degré en  $\omega$ , et que le coefficient du terme en  $\omega$  est  $MM'$ .

Pour trouver le terme indépendant de  $\omega$ , supposons  $\omega$  infiniment petit.

La première équation se réduit à :

$$K(\omega) = M'i$$

$x$  et  $i$  sont donc des infiniment petits du même ordre, et la deuxième équation devient :

$$Ri + M\omega j = 0$$

ce qui montre que  $i$  est infiniment petit devant  $j$ .

La troisième devient alors

$$Sj = rJ_0$$

et on conclut facilement de ce qui précède que  $\frac{x}{rJ_0}$  tend vers 0 avec  $\omega$ .

Donc  $P(\omega)$  n'a pas de terme indépendant et

$$\frac{x}{rJ_0} = \frac{MM'\omega}{Q(\omega)}.$$

Cette égalité permet de construire la courbe de résonance : comme on l'a vu précédemment, il faut porter en abscisses les valeurs de  $|\omega|$  et en ordonnées le rapport entre l'amplitude des vibrations de la plaque et l'amplitude de l'oscillation qui les produit, c'est-à-dire

$$\left| \frac{x}{rJ_0} \right|.$$

Pour que le son ne soit pas altéré il faut que le module de cette expression reste sensiblement constant; pour que le son soit intense, il faut que ce module soit aussi grand que possible.

On a déjà vu que ces deux qualités étaient incompatibles; on peut s'en rendre compte ici au moyen de la représentation géométrique des imaginaires (fig. 3).

Plaçons-nous dans le cas où l'équation caractéristique aurait deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées; soient  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  les quatre racines.

Soit  $\omega$  la période du son, variable dans les limites de la voix, et qui est représentée par une imaginaire pure.

Le module de l'expression  $\frac{x}{rJ_0}$  est proportionnel au quotient

$$\frac{\overline{O\omega}}{\omega\omega_1 + \omega\omega_2 + \omega\omega_3 + \omega\omega_4}.$$

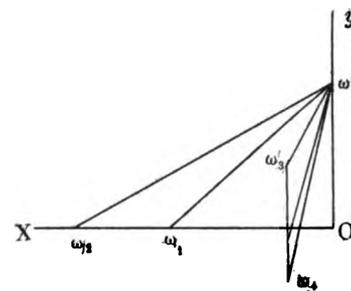


Fig. 3.

Si l'amortissement était trop fort, c'est-à-dire si les quatre racines étaient éloignées vers la gauche de l'axe  $oy$ , l'expression précédente varierait peu avec  $\omega$ , mais le dénominateur serait grand et les sons seraient peu intenses. Si au contraire l'amortissement était faible, les racines se rapprocheraient de  $oy$ ; le dénominateur diminuerait ce qui augmenterait l'expression de l'intensité; mais les variations de ce dénominateur seraient très rapides et les sons seraient altérés. La solution la plus avantageuse paraît être de rejeter  $\omega_1$  et  $\omega_2$  vers la gauche et de prendre  $\omega_3$  et  $\omega_4$  assez haut dans les sons aigus, mais non loin de  $oy$ ; de cette façon le dénominateur n'est pas trop grand et il varie assez lentement pour les valeurs moyennes de  $\omega$ .

Tout ce que nous venons de dire s'applique à une solution particulière de l'équation, savoir :

$$\frac{x}{rJ_0} = \frac{MM'\omega}{Q(\omega)}$$

d'où

$$x = \frac{MM'\omega}{Q(\omega)} A e^{st}.$$

On sait qu'en réalité le phénomène présente une période variable; le son commence à l'instant  $t = 0$  et à partir de ce moment on a :

$$rJ_0 = A e^{st}$$

ou plus généralement

$$rJ_0 = \Sigma A e^{st}.$$

Pour étudier la période variable il faut connaître la solution générale de l'équation différentielle en  $x$ .

Cette solution est de la forme :

$$x = \sum \frac{MM'\omega}{Q(\omega)} A e^{\omega t} + \sum B_k e^{\omega_k t}$$

le premier signe  $\Sigma$  s'étendant à tous les termes dont se compose l'expression de  $rJ_0$ , et le deuxième signe  $\Sigma$  s'appliquant aux quatre racines de l'équation caractéristique, qui définit les périodes propres du système.

On détermine les constantes B en écrivant que, pour  $t=0$ , on a

$$x = x' = i = j = 0.$$

On sait qu'il y a intérêt à ce que ces termes parasites disparaissent le plus vite possible, et cela dépend de l'amortissement.

(A suivre.)

H. POINCARÉ.

## L'ÉLECTROLYSE DES MÉLANGES

*Nature des composés chimiques dans une solution aqueuse. — Phénomène de l'Hydrolyse.* — On a vu précédemment, dans le phénomène de l'électrolyse, le rôle spécial de l'eau comme diélectrique. Mais l'eau joue en même temps un rôle chimique des plus importants : elle réagit avec les anhydrides d'acides pour donner naissance à des acides, avec les anhydrides basiques pour former des bases. De plus, en « vaporisant » pour ainsi dire les corps dans le phénomène de la dissolution, elle permet à chacun d'eux d'exercer une pression osmotique déterminée, et donne ainsi lieu à la production d'un état d'équilibre chimique entre ces différents corps et leurs composés possibles, soit en entraînant une réaction limitée entre deux ou plusieurs corps composants, soit en dissociant, c'est-à-dire en décomposant partiellement, un composé tout formé. Cette décomposition des sels par l'eau constitue le phénomène de l'hydrolyse.

Puisque c'est une dissociation, les lois de l'équilibre chimique (\*) sont donc applicables à ce phénomène de l'hydrolyse, et la nature des composés chimiques, et leur proportion dans la solution sont par suite données par l'application de la formule générale de l'équilibre chimique, à température constante :

$$\log \frac{p^n p'^n \dots}{p''^n \dots} = \text{constante} = k.$$

De même, l'influence de la température sur le déplacement de l'équilibre est donnée par la relation générale :

$$\frac{dk}{dT} = \frac{Q}{2T^2}.$$

L'ensemble de ces deux relations montre qu'une élévation de température déplace la réaction dans le sens endothermique, et inversement qu'un abaissement de température déplace la réaction dans son sens exothermique : c'est le principe bien connu de l'action et de la réaction.

(\*) Voir l'Eclairage Electrique, t. XXXIV, 31 janvier 1903, p. 152.

# L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Electriques — Mécaniques — Thermiques

DE

## L'ÉNERGIE

### DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — A. BLONDEL, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. — Éric GÉRARD, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — M. LEBLANC, Professeur à l'École des Mines. — G. LIPPMANN, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — D. MONNIER, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — H. POINCARÉ, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — A. WITZ, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

### ÉTUDE DU RÉCEPTEUR TÉLÉPHONIQUE (Suite)<sup>(1)</sup>

#### IV. — ÉTUDE DES COEFFICIENTS CONSTANTS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les coefficients qui entrent dans les équations précédentes ne sont pas en réalité constants ; nous allons montrer dans ce qui suit, qu'ils dépendent de certaines conditions dont jusqu'à présent nous n'avons point tenu compte.

Dans ce qui va suivre nous prendrons comme unité de résistance l'ohm, et comme unité de self-induction le milli-henry. On voit immédiatement qu'il faut, pour avoir un système cohérent, prendre pour unité de temps  $\frac{1}{1000}$  de seconde.

a) *Étude des coefficients de self et de résistance.* — M. Devaux-Charbonnel a mesuré la résistance et la self d'un appareil Ader. Il a obtenu les résultats suivants :

Récepteur . . . . .	}	Résistance courant continu . . . . .	140 ohms.
		— alternatif . . . . .	272 ohms, fréquence 1 000.
		Self-induction . . . . .	24 milli-henrys.
Circuit primaire du microphone (secondaire ouvert).	}	Résistance courant continu . . . . .	1,5 ohms.
		— alternatif . . . . .	13 ohms, fréquence 1 000.
		Self-induction . . . . .	8 milli-henrys.

<sup>(1)</sup> Voir l'*Éclairage Electrique*, tome L, 17 février 1907, p. 221.

Circuit secondaire du microphone (primaire ouvert).	}	Résistance courant continu. . . . .	154	ohms.
		— alternatif. . . . .	430	ohms, fréquence 1 000.
		Self-induction. . . . .	400	milli-henrys.
Circuit secondaire du microphone (primaire fermé sur 10 ohms).	}	Résistance courant alternatif. . . . .	670	ohms, fréquence 1 000.
		Self-induction. . . . .	36	milli-henrys.

On peut faire sur ce tableau les remarques suivantes :

1° La valeur de la résistance d'une bobine dépend essentiellement de la fréquence du courant qui y passe ; c'est ainsi que la résistance du récepteur Ader, par exemple, varie de 140 à 272 ohms lorsque la fréquence du courant qui la traverse varie de 0 à 1 000.

Cela tient essentiellement aux courants de Foucault qui se forment dans les masses métalliques de la bobine et qui, lorsque le courant atteint la fréquence 1 000, développent une chaleur Joule équivalente à celle que produirait une résistance de 132 ohms.

2° La résistance et la self-induction du secondaire du microphone varient suivant que le primaire est ouvert ou fermé.

Le calcul suivant va montrer que ces variations sont essentiellement dues à la présence d'une induction mutuelle du primaire et du secondaire.

Soient en effet  $L$  et  $R$  la self-induction et la résistance du circuit secondaire, lorsque le primaire est ouvert.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} L &= L' + L'' \\ R &= R' + R'' \end{aligned}$$

en appelant  $L'$  et  $R'$  les mêmes coefficients relatifs au récepteur ; et  $L''$ ,  $R''$  ceux du secondaire du transmetteur. Lorsque le primaire est fermé, les coefficients mesurés sur le secondaire sont

$$\begin{aligned} L_1 &\neq L'' \\ R_1 &\neq R'' \end{aligned}$$

$L_1$  et  $R_1$  sont la self et la résistance apparentes du secondaire, que nous nous proposons précisément de calculer en fonction de  $L''$  et  $R''$ .

Désignons par  $M$  l'induction mutuelle des deux circuits, par  $i$  et  $j$  les courants dans le secondaire et dans le primaire : nous les supposons sinusoïdaux ou, si l'on veut, proportionnels à  $e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  étant une imaginaire pure ; soit enfin  $E$  la force électromotrice alternative aux bornes du secondaire. La théorie bien connue des courants alternatifs donne les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (L''\omega + R'')i + M\omega j &= E && \text{(secondaire)} \\ M\omega i + (N\omega + S)j &= 0 && \text{(primaire)} \end{aligned}$$

$N$  et  $S$  sont la self et la résistance du primaire, fermé sur 10 ohms et ne contenant aucune force électromotrice.

On tire de ces deux équations :

$$\frac{E}{i} = L''\omega + R'' - \frac{M^2\omega^2(S - N\omega)}{S^2 - N^2\omega^2}.$$

Or, si l'on avait mesuré sans précaution la self et la résistance apparente du secondaire du microphone, on aurait trouvé :

$$\frac{E}{i} = L_1\omega + R_1$$

d'où

$$L_1\omega + R_1 = L''\omega + R'' - \frac{M^2\omega^2(S - N\omega)}{S^2 - N^2\omega^2}.$$

Comme nous l'avons dit  $\omega$  est une imaginaire pure, et il vient par suite, en égalant les parties imaginaires et les parties réelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = L'' - \frac{M^2}{N - \frac{S^2}{N\omega^2}} \\ R_1 = R'' - \frac{M^2\omega^2 S}{S^2 - N^2\omega^2} \end{array} \right.$$

Or :  $\omega^2 > 0$ . Par suite

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 < L'' \\ R_1 > R'' \end{array} \right.$$

Donc la présence d'une induction mutuelle produit une diminution apparente de la self-induction et une augmentation apparente de la résistance.

Finalement nous prendrons dans nos calculs

$$\begin{aligned} L &= L' + L'' = 24 + 400 = 424 \\ N &= 8 \\ R &= R' + R'' = 272 + 670 = 942 \\ M &= \sqrt{L'' \times N} = 56. \end{aligned}$$

L'hypothèse  $M^2 = L'' \cdot N$  correspondrait au cas où le transformateur du microphone n'aurait pas de fuite magnétique, cas qui est à peu près réalisé.

b) *Détermination de la masse de la plaque vibrante.* — Il ne serait pas exact de prendre pour  $m$  la masse même de la plaque vibrante. Soit en effet  $u$  le déplacement d'un point quelconque de la plaque ;  $u$  est une fonction de la distance de ce point au centre. La force vive est :

$$\frac{1}{2} \sum \mu u'^2$$

$\mu$  étant l'élément de masse dont la vitesse est  $u'$ .

Le déplacement du centre étant  $x$ , on a  $x' > u'$ . Donc si nous représentons la force vive par  $\frac{1}{2} m x'^2$  il faut nécessairement que  $m < \sum \mu$ .

Pour avoir l'expression exacte de la force vive, il faudrait trouver l'expression de  $u$  en fonction de  $r$ . La théorie de l'élasticité enseigne que cette fonction peut être déterminée par l'équation :

$$\Delta \Delta u = ku$$

et sur le pourtour, où la plaque est encadrée, on a les équations aux limites

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ \frac{du}{dr} &= 0. \end{aligned}$$

On a ainsi une équation du quatrième ordre.

On est amené à prendre

$$m = \frac{1}{5} \sum \mu.$$

Si on suppose que la masse totale de la plaque est de 5 grammes, nous prendrons  $m = 1^{\text{gr}}$ .

c) *Détermination des coefficients  $k$  et  $M'$ .* — Ces deux coefficients ont été déterminés par M. Abraham.

Pour mesurer  $k$ , on note la flexion d'une plaque encastrée et on trouve qu'un poids de 75 grammes produit une flexion de 250  $\mu$ .

Or nous avons vu que la première des équations de Maxwell appliquée au téléphone était :

$$mx'' + Fx' + kx - M'i = \Phi.$$

Dans l'expérience actuelle elle se réduit à

$$kx = \Phi.$$

$$k = \frac{\Phi}{x} = \frac{75 \times 10^3}{25 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^6 \text{ c. g. s.}$$

Or, dans le système d'unités que nous avons adopté, on prend pour unités fondamentales le gramme-masse, l'ohm et le millihenry. Nous avons déjà dit que l'unité de temps dans ce système valait 0,001 : en effet, l'unité de résistance n'étant pas changée, et ses dimensions étant  $LT^{-1}$ , puisque l'unité de longueur (millihenry) est 1000 fois plus petite que dans le système pratique, il en est de même de l'unité de temps.

De plus dans le système pratique l'unité de longueur (henry) vaut  $10^9$  c. g. s.; donc, dans celui-ci, elle vaut  $10^6$  c. g. s. Il résulte de ces remarques que  $k$  ayant pour dimensions  $MT^{-2}$ , sera mesuré par un nombre  $10^6$  fois plus petit qu'en unités c. g. s.

Donc, dans notre système,  $k = 3$ .

Quant à  $M'$  on le mesure en faisant passer un courant continu de 0,01 dans la bobine, et on trouve un déplacement de 1<sup>re</sup>.

Or, nous avons vu que dans le circuit l'équation de Maxwell était :

$$(m\omega^2 + F\omega + k)x = M'i.$$

Le courant étant continu  $\omega = 0$ , et par suite

$$M' = \frac{kx}{i} = \frac{3 \times 10^6 \times 10^{-4}}{10^{-3}} = 0,3 \times 10^6 \text{ c. g. s.}$$

et d'après ce qui précède,  $M'$  étant une longueur sera mesuré dans notre système par le nombre  $M' = 0,3$ .

L'appareil de M. Abraham avait une résistance de 13 ohms ; notre récepteur a 140 ohms soit environ 10 fois plus. Nous admettrons que dans notre récepteur, le coefficient  $M'$  eût été 10 fois plus grand et nous prendrons ici  $M' = 3$ . Nous pouvons maintenant écrire l'équation numérique à laquelle nous arrivons :

$$(m\omega^2 + F\omega + k) [(L\omega + R)(N\omega + S) - M^2\omega^2] + M'^2\omega(N\omega + S) = 0.$$

La résistance du primaire fermé sur 10 ohms est :  $S = 23$  et en négligeant le terme  $F\omega$ , il vient en chiffres ronds :

$$(\omega^2 + 3) [480\omega^2 + 17.288\omega + 21.666] + 9\omega(8\omega + 23) = 0.$$

Il ne faut pas oublier du reste que ces coefficients dépendent de  $\omega$ .

*Cas de deux récepteurs et de deux transmetteurs.* — Nous allons voir que dans ce cas il n'y a rien de changé.

Nous introduirons deux variables de plus, savoir : le déplacement du centre de la plaque vibrante du deuxième récepteur, soit  $x_1$ , et le courant dans le primaire du deuxième transmetteur, soit  $J_1$ .

Les deux appareils sont identiques de sorte que l'on peut poser comme précédemment, pour ce deuxième transmetteur :

$$J_1 = J_0 + j_1 \text{ et } R_1 = S + r_1$$

S étant la résistance moyenne, la même pour les primaires des deux microphones.

La self de la ligne devient  $2L$  ; la résistance est  $2R$  et on obtient les équations :

$$\begin{aligned} (m\omega^2 + F\omega + k)x &= M'i = (m\omega^2 + F\omega + k)x_1 && \text{(récepteurs)} \\ 2(L\omega + R)i + M'\omega(x + x_1) + M\omega(j + j_1) &= 0 && \text{(ligne et secondaires)} \\ \left. \begin{aligned} (N\omega + S)j + M\omega i &= -rJ_0 \\ (N\omega + S)j_1 + M\omega i &= -r_1J_0 \end{aligned} \right\} && \text{(primaires).} \end{aligned}$$

On déduit de ce système :

$$x = x_1.$$

De plus en introduisant les variables

$$\frac{j + j_1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r + r_1}{2}$$

on retombe sur un système de même forme que celui obtenu dans le cas précédent et on en tire :

$$\frac{MM'\omega}{Q(\omega)} = \frac{x}{J_0 \frac{r + r_1}{2}}$$

Comme en général, il n'y a qu'un appareil qui fonctionne, on peut faire  $r_1 = 0$  et on voit que  $x$  est divisé par 2.

*Détermination théorique des coefficients  $k$  et  $M'$ .* — Le coefficient  $k$  est relatif à l'attraction exercée sur la plaque lorsqu'aucun courant ne passe dans la bobine : cette force qui agit sur la plaque se compose de deux termes : force d'attraction du noyau, force produite en vertu de l'élasticité de la plaque.

La deuxième force a une expression de la forme :

$$(k_0 + k_1x).$$

Quant à la première, ce sera

$$H^2\varphi(x)$$

$H$  étant le champ dû à l'aimant permanent.

Comme  $x$  est toujours petit, cette deuxième force a pour expression suffisamment approchée :

$$H^2\varphi(0) + xH^2\varphi'(0).$$

Pour  $x = 0$  le système est en équilibre ; par suite

$$k_0 + H^2\varphi(0) = 0.$$

Le coefficient  $k$  est donc de la forme :

$$k = k_1 + H^2\varphi'(0).$$

Comme l'attraction augmente lorsqu'on se rapproche de l'aimant on a nécessairement :

$$\varphi'(0) < 0.$$

D'autre part on a évidemment :  $k_1 > 0$  et comme on a vu que la stabilité du mouvement exige que  $k > 0$  on en conclut que  $\varphi'(0)$  ne doit pas être trop fort.

Quant au coefficient  $M'$  il y aurait évidemment intérêt à l'augmenter ; lorsque le courant passe, le champ devient :  $H + H_1 i$ , et l'attraction est

$$(H + H_1 i)^2 \varphi(x).$$

Le terme  $M i$  qui représente l'attraction exercée par le courant sur la plaque vibrante est ici

$$M' i = 2 H H_1 \varphi(0) \times i$$

et

$$M' = 2 H H_1 \varphi(0).$$

Donc pour augmenter  $M'$ , il faut augmenter le champ permanent  $H$  ; mais on ne peut l'augmenter indéfiniment, car si l'on approche de la saturation, un courant donné  $i$  augmente très peu le champ, ce qui revient à dire que  $H_1$  diminue.

Ce champ  $H_1$  augmente avec le nombre des spires de la bobine, mais on augmente en même temps  $R$  et  $L$ , ce qui justifie l'assertion avancée plus haut, que  $M'$  croît proportionnellement à  $R$ . Quant à  $\varphi(0)$  il y aurait intérêt à l'augmenter, c'est-à-dire à diminuer l'entrefer ; mais on ne peut trop le réduire car  $\varphi(x)$  varierait très vite au voisinage de  $x = 0$  ; par suite  $\varphi'(0)$  serait très grand et nous avons vu plus haut que cela peut avoir des inconvénients.

*Remarque sur l'équation caractéristique.* — Nous nous sommes servis pour établir l'équation numérique en  $\omega$  des valeurs réelles de  $L$  et de  $R$ . On peut modifier cette équation et se servir des valeurs apparentes de la self et de la résistance du secondaire.

Reprenons en effet l'équation :

$$(m\omega^2 + F\omega + k [(N\omega + S) [(L' + L'')\omega + (R' + R'')] - M^2\omega^2] + M'^2\omega(N\omega + S) = 0.$$

On a vu que

$$\left\{ \begin{array}{l} L'' = L_1 + \frac{M^2 N \omega^2}{N^2 \omega^2 - S^2} \\ R'' = R_1 - \frac{M^2 \omega^2 S}{N^2 \omega^2 - S^2} \end{array} \right.$$

d'où l'équation

$$(m\omega^2 + F\omega + k [(N\omega + S) [(L' + L_1)\omega + (R' + R_1)] + (N\omega + S) M^2 \omega^2 \frac{N\omega - S}{N^2 \omega^2 - S^2} - M^2 \omega^2] + \dots = 0$$

qui se réduit en négligeant le terme  $F\omega$  à :

$$(m\omega^2 + k) [(L' + L_1)\omega + (R' + R_1)] + M^2 \omega = 0.$$

Si maintenant nous substituons les valeurs trouvées précédemment, il vient :

$$(\omega^2 + 3) [(24 + 36)\omega + (272 + 670)] + 9\omega = 0.$$

ou

$$(\omega^2 + 3)(60\omega + 942) + 9\omega = 0.$$

Les deux racines imaginaires de cette équation sont voisines de  $\pm \sqrt{-3}$ .

(A suivre.)

H. POINCARÉ.

# L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Electriques — Mécaniques — Thermiques

DE

## L'ÉNERGIE

### DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — A. BLONDEL, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. — Éric GÉRARD, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — M. LEBLANC, Professeur à l'École des Mines. — G. LIPPMANN, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — D. MONNIER, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — H. POINCARÉ, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — A. WITZ, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

### ÉTUDE DU RÉCEPTEUR TÉLÉPHONIQUE (suite)<sup>(1)</sup>.

#### V. — THÉORIE DES COURANTS DE FOUCAULT.

D'après ce que nous avons dit, ces courants semblent jouer un rôle important dans le fonctionnement des appareils.

Nous distinguerons les courants qui se ferment dans le noyau et ceux qui se ferment dans la plaque.

#### I. — SECTION CIRCULAIRE.

##### A. — Courants dans le noyau de l'électro-aimant.

Nous assimilerons la bobine à un solénoïde indéfini ou à un tore dont le rayon serait grand vis-à-vis du rayon du cercle générateur. On sait que,  $i$  étant le courant qui circule autour de ces noyaux, le champ d'induction magnétique à l'intérieur est constant et sa valeur est :

$$H_1 = 4\pi\mu ki.$$

$\mu$  est la perméabilité magnétique, et  $ki$  représente le nombre d'ampère-tours par millimètre de longueur, ce qui fait que  $H$  est exprimé en unités C. G. S.

Si maintenant nous supposons  $i$  variable, il se produit à l'intérieur de la masse métallique des courants de Foucault ; soit  $jdr$  le courant de Foucault mesuré en ampères, circulant dans

<sup>(1)</sup> *Éclairage Électrique*, tome L, 23 février 1907, page 257.

un espace compris entre deux circonférences concentriques à l'axe du solénoïde de rayons  $r$  et  $r + dr$  et ayant un millimètre de hauteur.

Le champ dû à ce courant et régnant dans cet espace est :

$$H_2 = 4\pi\mu j dr.$$

La constante  $k$  est ici égale à 1, car on peut dire qu'il n'y a qu'une spire sur une longueur de 1 millimètre.

Le champ total est donc en C. G. S. à la distance  $r$  de l'axe :

$$H = H_1 + H_2 = 4\pi\mu k i + 4\pi\mu \int_r^{r_0} j dr,$$

$r_0$  étant le rayon du noyau

$$\frac{dH}{dr} = -4\pi\mu j.$$

Quant au flux qui traverse la circonférence de rayon  $r$ , il est égal à :

$$2\pi \int_0^r H r dr,$$

car  $2\pi r dr$  est la surface d'une couronne infiniment petite comprise entre les cercles de rayons  $r$  et  $r + dr$ .

La force électromotrice d'induction est la dérivée du flux par rapport au temps : si nous admettons qu'il est proportionnel à  $e^{-t}$ , sa dérivée est

$$2\pi\omega \int_0^r H r dr.$$

Si nous écrivons que la force électromotrice est égale au produit de la résistance par l'intensité, nous aurons une deuxième relation entre  $j$ ,  $H$ , et  $r$ .

Or le courant est  $j dr$  exprimé en ampères.

La longueur du circuit étant  $2\pi r$ , sa hauteur 1 millimètre, et sa largeur  $dr$ , si  $C$  est la conductibilité, la résistance de ce circuit infiniment mince est

$$\frac{2\pi r}{C \cdot dr \cdot 1^{\text{mm}}}$$

d'où l'égalité

$$2\pi r \cdot j \cdot dr = 2\pi C dr \cdot \omega \int_0^r H r dr,$$

ou :

$$jr = C\omega \int_0^r H r dr$$

ou :

$$\frac{d(jr)}{dr} = C\omega H r.$$

On a donc les 2 relations

$$\begin{cases} \frac{dH}{dr} = -4\pi\mu j \\ \frac{d(jr)}{dr} = C\omega H r \end{cases}$$

d'où en multipliant la première par  $r$  et différentiant :

$$r \frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{dH}{dr} = -4\pi\mu \frac{d}{dr} (jr) = -4\pi\mu C\omega H r$$

ou

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + \alpha^2 H = 0$$

avec

$$\alpha^2 = 4\pi\mu C\omega.$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Bessel, car on revient à la forme connue en posant

$$r = \frac{x}{\alpha}$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dH}{dx} + H = 0.$$

Cette équation admet comme solution celle des fonctions de Bessel que l'on désigne habituellement par  $J_0$ , d'où

$$H = J_0(\alpha r).$$

Mais  $\alpha^2$  est une imaginaire pure comme  $\omega$  ; donc  $\alpha$  est imaginaire et son argument est égal à  $45^\circ$ . Les formules de Bessel s'appliquent d'ailleurs dans ce cas.

On peut voir sur l'équation elle-même que si  $\alpha$  est très grand, on a sensiblement  $H = 0$ , c'est-à-dire que le champ se trouve à la surface du noyau ; si au contraire  $\alpha = 0$ , le champ est constant à l'intérieur du noyau.

Par exemple pour la fréquence 1000, on a

$$\omega = 2\pi \cdot 10^3 \sqrt{-1}.$$

Si on prend

$$\left. \begin{array}{l} C = 10^4 \\ \mu = 10 \end{array} \right\} \text{ en C. G. S.}$$

il vient :

$$4\pi\mu C\omega = 80 \sqrt{-1}.$$

## II. — NOYAU DE FORME QUELCONQUE.

Nous assimilerons encore le noyau à un solénoïde indéfini, mais de section quelconque ; les lignes de force sont parallèles à une certaine direction que nous prendrons pour axe des  $z$ .

Soient  $u, v, w$  les composantes du courant suivant les trois axes ; on a évidemment :  $w = 0$ .

Pour retrouver les relations entre le champ et le courant nous appliquerons l'égalité :

$$\mathcal{E} = 4\pi I.$$

$\mathcal{E}$  étant le travail d'une masse magnétique égale à 1 le long d'un circuit traversé pendant l'unité de temps par une quantité d'électricité égale à 1.

Appliquons la formule à un rectangle infiniment petit dont les côtés sont parallèles aux axes  $ox$  et  $oz$  (fig. 4).

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{AB} &= -H dz \\ \mathcal{E}_{CD} &= \left( H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dz \\ \mathcal{E}_{BC} &= \mathcal{E}_{DA} = 0. \end{aligned}$$

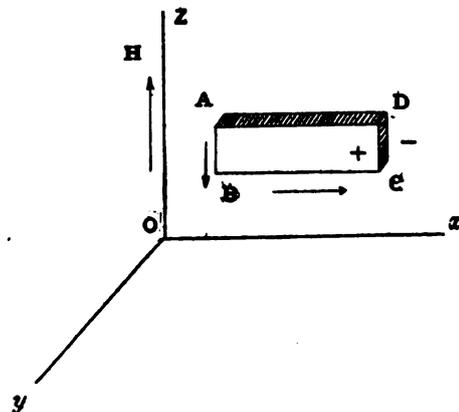


Fig. 4.

D'autre part si nous assimilons le rectangle à un feuillet magnétique dont la face positive serait en avant, la quantité d'électricité qui y passe pendant l'unité est, avec les conventions ordinaires de signe,

$$I = -v dx dz,$$

d'où enfin :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -4\pi v.$$

Dans cette formule H représente, par définition, le champ magnétique en un point du noyau ; si nous voulons qu'il représente le champ d'induction, il faut multiplier le résultat par  $\mu$  et finalement on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -4\pi\mu v. \quad (1)$$

On trouverait de même, le long d'un rectangle de côtés  $dz$  et  $dy$  :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 4\pi\mu w. \quad (2)$$

Ceci posé, soit un contour quelconque dans le plan des  $xy$ . Le flux d'induction qui le traverse est :

$$\int H d\sigma$$

H étant le champ d'induction à l'intérieur de l'élément d'aire  $d\sigma$ .

La force électromotrice d'induction qui est la dérivée par rapport au temps du flux est :

$$\omega \int H d\sigma$$

en supposant encore toutes les quantités proportionnelles à  $e^{wt}$ .

Écrivons que dans ce circuit on a :

$$E = RI.$$

Or, si C est la conductibilité, on sait que :

$$RI = \frac{I}{c} \int_L (u dx + v dy) = \frac{I}{c} \iint \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) d\sigma$$

d'où on tire :

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = C\omega H$$

et en se servant des équations (1) et (2)

$$\Delta H = -4\pi\mu \left( \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) = -4\pi\mu C\omega H.$$

Donc H est solution de l'équation :

$$\Delta H + \alpha^2 H = 0$$

en posant

$$\alpha^2 = 4\pi\mu C\omega.$$

Pour intégrer, il faut établir les conditions aux limites.

Or, le courant est tangent à la surface du noyau, ce qui donne dans le cas de notre noyau cylindrique

$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy}$$

ou

$$u dy - v dx = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial x} dx = 0$$

ou :

$$H = \text{constante}$$

à la surface du noyau.

Cette valeur constante est d'ailleurs celle qui se rencontrerait s'il n'y avait pas de courants de Foucault : c'est le champ qui régnerait à l'intérieur d'une bobine dont le noyau serait une matière non conductrice de perméabilité  $\mu$ . Nous l'avons appelé :  $4\pi\mu Ki$ .

*Cas particulier.* — Nous avons déterminé H quand le noyau était circulaire ; supposons maintenant la section rectangulaire et limitée par 4 droites d'équations

$$x = \pm a \quad y = \pm b.$$

Pour trouver H nous partirons des 2 identités :

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi x}{2a}$$

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cos \frac{n\pi y}{2b}.$$

Ces deux identités se démontrent facilement par la formule de Fourier, en cherchant le développement en série trigonométrique d'une fonction qui reste égale à 1 lorsque la variable reste comprise entre 2 limites égales et de signe contraire :

$$-a < x < a \quad \text{ou} \quad -b < y < b.$$

Dans ces formules  $m$  et  $n$  prennent des valeurs impaires et positives.

Il résulte de là qu'en multipliant ces 2 séries, on arrive à une nouvelle identité :

$$1 = \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}}}{m \cdot n} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}.$$

Ceci posé, si nous prenons

$$H = 1 + \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}}}{m \cdot n} \frac{\alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2} + \frac{n^2\pi^2}{4b^2} - \alpha^2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}$$

il est facile de voir que H satisfait bien aux conditions demandées.

En effet :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}}}{m \cdot n} \times \frac{-\frac{m^2\pi^2}{4a^2} \alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2} + \frac{n^2\pi^2}{4b^2} - \alpha^2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}.$$

De même :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}}}{m \cdot n} \times \frac{-\frac{n^2\pi^2}{4b^2} \alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2} + \frac{n^2\pi^2}{4b^2} - \alpha^2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b},$$

d'où enfin :

$$\Delta H + \alpha^2 H = \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}}}{m \cdot n} \times \frac{\left( \frac{-m^2\pi^2}{4a^2} - \frac{n^2\pi^2}{4b^2} + \alpha^2 \right) \alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2} + \frac{n^2\pi^2}{4b^2} - \alpha^2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} + \alpha^2$$

ou :

$$-\frac{16}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{n-1}{2}}}{m \cdot n} \times \alpha^2 \times \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} + \alpha^2 = 0.$$

en vertu de l'identité précédemment décrite. Donc H satisfait bien à l'équation aux dérivées partielles proposée.

En outre, on voit immédiatement que

$$H = 1 \quad \text{pour} \quad x = \pm a \quad \text{ou} \quad y = \pm b$$

car chaque terme de la série s'annule.

*Grandes fréquences.* — Lorsque le noyau a une section de forme compliquée on arrive à des calculs inextricables. Mais lorsque  $\alpha^2$  est grand, c'est-à-dire dans le cas des courants de haute fréquence, on peut appliquer à un noyau de forme quelconque une formule approchée.

Remarquons d'abord que le champ H étant supposé périodique, on a :

$$H = H_1 + H_2 \sqrt{-1}$$

le module de H représentant, suivant les conventions habituelles, l'amplitude du champ et l'argument représentant la phase ; en outre  $\alpha^2$  est imaginaire et on peut poser :

$$\alpha^2 = \beta \sqrt{-1}$$

d'où on tire, en vertu de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \Delta H_1 = \beta H_2 \\ \Delta H_2 = \beta H_1. \end{cases}$$

Ces notations étant admises, je dis que le module de H est à l'intérieur du noyau toujours plus petit que sur la surface : en effet, soit :

$$P = H_1^2 + H_2^2.$$

On trouve facilement en différentiant 2 fois :

$$\Delta P = 2H_1 \Delta H_1 + 2H_2 \Delta H_2 + 2 \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial H_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial H_2}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial H_2}{\partial y} \right)^2$$

et, en tenant compte des valeurs précédemment trouvées pour  $\Delta H_1$  et  $\Delta H_2$ ,

$$\Delta P = 2 \left[ \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_2}{\partial y} \right)^2 \right] > 0.$$

Cette condition montre que P ne peut avoir de maximum à l'intérieur du noyau, car si cette fonction était maxima en un certain point, on pourrait autour de ce point décrire une sphère suffisamment petite pour qu'en chaque point de sa surface on ait

$$\frac{dP}{dn} < 0,$$

la dérivée étant prise suivant la normale extérieure et par suite l'intégrale suivant la surface sphérique serait

$$\iint \left( \frac{dP}{dn} \right) d\sigma < 0,$$

mais cela est impossible car en vertu de la formule de Green, on a :

$$\iint_s \left( \frac{dP}{dn} \right) d\sigma = \iiint_v \Delta P \cdot dx dy dz$$

l'intégrale triple étant prise à l'intérieur du volume de la sphère et étant évidemment positive.

Comme cependant il y a dans le noyau une valeur de  $H$  plus grande que toutes les autres, cette valeur ne peut se rencontrer que sur la surface du noyau, et on voit en passant que le champ à l'intérieur est moindre que celui qui régnerait s'il n'y avait pas de courants de Foucault.

Il est maintenant facile d'obtenir une équation approchée.

Considérons un point de la surface et prenons pour axe  $ox$ , la normale intérieure au noyau ; l'axe  $oz$  est la génératrice passant par ce point, et par suite  $oy$  n'est autre que la tangente à la section droite du noyau cylindrique. Soit une région intérieure au noyau, située dans le voisinage de ce point : en tout point de cette région, le champ satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \alpha^2 H = 0.$$

Si tous ces points sont suffisamment rapprochés du point de la surface pris pour origine des coordonnées, les quantités

$$\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

varient très rapidement quand  $\alpha$  est très grand, car le champ est alors très faible à l'intérieur du noyau ; au contraire les quantités

$$\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

restent finies. On peut donc écrire l'équation approchée

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \alpha^2 H = 0$$

équation valable pour des points infiniment voisins de la surface du noyau.

Cette équation s'intègre immédiatement et admet pour solution :

$$H = Ae^{\alpha x \sqrt{-1}} + Be^{-\alpha x \sqrt{-1}}$$

$A$  et  $B$  étant des constantes par rapport à  $x$ , mais fonctions de  $y$ . Supposons pour fixer les idées, que le signe de  $\alpha$  soit tel que la partie réelle de  $\alpha \sqrt{-1}$  soit négative ; la partie réelle du deuxième terme est alors positive, et comme  $\alpha$  est grand, ce terme croît très rapidement, et  $H$  peut devenir plus grand pour une certaine valeur de  $x$  que sur la surface. Or cela est impossible ; il faut donc que  $B$  soit très petit devant  $A$  et finalement on peut écrire :

$$H = \Lambda e^{\alpha x \sqrt{-1}}$$

d'où :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \alpha \sqrt{-1} H.$$

Nous aurons ainsi des équations analogues pour tous les points infiniment voisins de la surface du noyau, en prenant chaque fois comme axe  $ox$  la normale aux différents points de la surface.

A la limite, nous pourrions écrire l'équation :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha \sqrt{-1} H$$

applicable à tous les points de la surface du noyau. C'est l'équation approchée que nous avons en vue d'établir.

..

Dans le cas d'un noyau circulaire on aurait l'équation :

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \alpha H \sqrt{-1}.$$

On trouverait pour H une fonction exponentielle de  $r$  qui, on le sait, est une valeur asymptotique des fonctions de Bessel.

#### INFLUENCE DES COURANTS DE FOUCAULT SUR LES COEFFICIENTS DE L'APPAREIL.

1° Coefficient  $M'$ . — Nous avons vu un peu plus haut que l'attraction du noyau sur la plaque était

$$H^2 \varphi(x).$$

H étant le champ total, et de là on tirait le coefficient  $M'$ . Cette formule supposait essentiellement le champ H constant ; s'il n'en est pas ainsi, l'attraction de la plaque à une distance donnée est proportionnelle à l'intégrale

$$\int (H_0 + H)^2 d\sigma$$

$H_0$  étant le champ d'induction dû à l'aimantation permanente, et H celui dû à un courant  $i$ .

Par suite le coefficient  $M'$ , d'après ce que nous avons dit plus haut, est proportionnel à l'intégrale de surface

$$\int H_0 \times H d\sigma,$$

le champ de cette intégrale étant l'aire de la section droite du noyau cylindrique.

Si nous supposons que le champ permanent est uniforme, le coefficient  $M'$  est alors proportionnel à

$$\int H d\sigma.$$

Or nous avons vu que la loi d'Ohm appliquée à la force électromotrice d'induction, donnait la relation

$$\omega \int_S H d\sigma = \frac{1}{C} \int_L (uax + vdy)$$

l'intégrale curviligne étant prise suivant la courbe de section droite tracée sur le noyau, et comme

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial y} \\ v = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial x} \end{array} \right.$$

il vient :

$$\int_S H d\sigma = \int_L \left( \frac{\partial H}{\partial y} dx - \frac{\partial H}{\partial x} dy \right) \frac{1}{4\pi\mu C \omega}.$$

Or, sur une courbe quelconque,  $\theta$  étant l'angle de la tangente avec  $ox$ , on a :

$$dx = ds \cos \theta$$

$$dy = ds \sin \theta$$

d'où :

$$\frac{\partial H}{\partial y} dx - \frac{\partial H}{\partial x} dy = \frac{dH}{dn} ds$$

$\frac{dH}{dn}$  étant la dérivée par rapport à la normale extérieure à la courbe. Ici la normale à cette

courbe de section droite, n'est autre que la normale à la surface cylindrique et on peut écrire en vertu de l'équation trouvée précédemment

$$\int_S H d\sigma = \int_L \frac{dH}{dn} ds \times \frac{1}{\alpha^2} = \int_L H \sqrt{-1} \frac{ds}{\alpha}$$

car

$$\frac{dH}{dn} = \alpha H \sqrt{-1}$$

et comme sur la surface on a :

$$H = \text{const}^{10}$$

$$\int_S H d\sigma = \frac{sH\sqrt{-1}}{\alpha}$$

$s$  est le périmètre du noyau.

On a, à un facteur près, la valeur de  $M'$ .

S'il n'y avait pas de courants de Foucault, le champ serait uniforme et sa valeur serait :

$$\int_S H d\sigma = H\sigma$$

$\sigma$  étant l'aire de la section du noyau.

Le rapport entre les deux coefficients  $M'$  que l'on obtient dans ces deux cas est donc :

$$\frac{sH\sqrt{-1}}{\alpha H\sigma} = \frac{s\sqrt{-1}}{\alpha \cdot \sigma}$$

Ce rapport est imaginaire, par suite cela revient à dire que l'effet des courants de Foucault est de décaler le champ par rapport aux oscillations de la membrane.

Ce décalage est d'ailleurs, puisque  $s$  et  $\sigma$  sont réels, la différence entre les arguments de  $\sqrt{-1}$  et de  $\alpha$ .

Or  $\alpha^2$  étant purement imaginaire, on a :

$$\arg \alpha^2 = \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$\arg \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg \sqrt{-1} = \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$\arg \frac{s\sqrt{-1}}{\alpha \sigma} = \frac{\pi}{4}$$

Quant au coefficient  $M'$ , il est diminué dans le rapport

$$\frac{s}{\sigma \cdot \alpha} = \frac{s}{\sigma \sqrt{8\pi^2 \mu C} \times n}$$

$n$  étant la fréquence du courant.

Dans le cas actuel  $\alpha$  n'est jamais extrêmement grand et cette formule est grossièrement approchée.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que le champ  $H_0$  était constant ; en réalité il n'en est pas ainsi. Le rapport entre les deux coefficients  $M'$  avec et sans courants de Foucault se trouve alors modifié et l'effet de ces courants peut être atténué.

2° *Coefficients L et R.* — Soient  $L'$  et  $R'$  la self-induction et la résistance vraies du cuivre de la bobine, et soit  $E$  la différence de potentiel aux bornes.

La loi fondamentale de l'induction

$$E = RI + \frac{d\Phi}{dt}$$

donne ici :

$$E = R'i + \omega \int Hd\tau.$$

S'il n'y avait pas de courants de Foucault le flux passant à travers le noyau serait :  $L'i$  et on aurait :

$$E = R'i + \omega L'i.$$

Par l'effet des courants de Foucault, nous avons vu que le flux se trouve multiplié par

$$\frac{s\sqrt{-1}}{\alpha \cdot \sigma}.$$

Cette quantité ayant un argument égal à  $\frac{\pi}{4}$ , on peut poser :

$$\frac{s\sqrt{-1}}{\alpha \cdot \sigma} = \beta(1 + \sqrt{-1})$$

d'où :

$$E = R'i + \omega L'i \times \beta(1 + \sqrt{-1}).$$

Or si l'on pose :

$$E = R_1 i + L_1 \omega i$$

$R_1$  et  $L_1$  représenteront ce qu'on pourra appeler la résistance et la self *observées*.

En comparant ces deux expressions, et égalant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} R_1 = R' + \omega \sqrt{-1} \cdot L' \beta \\ L_1 = L' \beta. \end{cases}$$

Donc la self est multipliée par  $\beta$ , et par suite elle est diminuée puisque tout ceci suppose  $\alpha$  très grand et par suite  $\beta$  très petit.

Comme vérification on remarque que :

$$R_1 = R' + L_1 \omega \sqrt{-1}.$$

On a vu que :

$$R_1 = 272 \text{ ohms}$$

$$L_1 = 24 \text{ millihenrys}$$

$$R' = 140$$

$$\omega \sqrt{-1} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

car la période étant supposée égale à  $\frac{1}{1000}$  de seconde, on a vu que dans le système adopté, l'unité de temps était justement 0<sup>se</sup>,001.

On doit donc vérifier, si nos déductions sont exactes, la relation précédente, ce qui est à peu près vrai.

(A suivre.)

HENRI POINCARÉ.

# L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Électriques — Mécaniques — Thermiques

DE

## L'ÉNERGIE

### DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France. Membre de l'Institut. — A. BLONDEL, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. — Éric GÉRARD, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — M. LEBLANC, Professeur à l'École des Mines. — G. LIPPMANN, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — D. MONNIER, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — H. POINCARÉ, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — A. WITZ, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

### ÉTUDE DU RECEPTEUR TÉLÉPHONIQUE (suite) (1).

#### B. — Courants dans la plaque.

Nous allons maintenant étudier les courants de Foucault qui peuvent se produire dans la plaque vibrante.

L'amplitude des vibrations de cette plaque est très faible, et il doit en être de même des courants induits ; mais la chaleur produite par ces courants est de même ordre que le travail des forces qui produisent les vibrations, car cette chaleur et ce travail sont de l'ordre du carré de l'amplitude, de sorte que le rapport entre ces 2 quantités est indépendant de cette amplitude.

Ceci posé, considérons notre plaque comme limitée par 2 plans parallèles, indéfinis, et prenons pour axe  $ox$  la perpendiculaire à ces 2 plans.

Si  $\Omega$  est le potentiel magnétique de la plaque, les composantes de l'induction magnétique à l'intérieur sont :

$$\mu \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \mu \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

La vitesse de déplacement de la plaque a pour composantes  $x'$ ,  $0$ ,  $0$ , et par suite les composantes de la force électromotrice qui donne naissance aux courants de Foucault sont :

$$0, \quad \mu x' \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad -\mu x' \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

(1) L'Éclairage Électrique, t. L, 16, 23 février et 9 mars 1907, p. 222, 257 et 329.

et les composantes du courant lui-même sont, en négligeant la self-induction de ce courant de Foucault :

$$0, \quad \mu C x' \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad -\mu C x' \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Il faudrait en réalité ajouter à ces 3 composantes 3 termes de la forme :

$$C \frac{\partial V}{\partial x}, \quad C \frac{\partial V}{\partial y}, \quad C \frac{\partial V}{\partial z}$$

V étant le potentiel électrique.

Mais le courant doit satisfaire à la condition solénoïdale, ce qui donne :

$$C \Delta V + \mu C x' \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \cdot \partial z} \right) = 0$$

ou :

$$\Delta V = 0.$$

D'ailleurs sur les 2 plans limitant la plaque, le courant est parallèle et par suite n'a pas de composantes suivant  $ox$ . Donc sur ces deux plans limites

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Par suite, d'après un théorème sur les fonctions harmoniques, cette fonction V reste constante à l'intérieur du volume limité par ces 2 plans ; comme d'ailleurs à l'infini elle est nulle, c'est qu'en tout point de la plaque, on a :

$$V = 0.$$

Donc, si C est exprimé en unités c. g. s., la chaleur produite est en ergs :

$$\mu^2 C x'^2 dt \int \left[ \left( \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right)^2 \right] dr$$

l'intégration étant étendue à toute la plaque.

*Champ magnétique dans la plaque.* — Pour pouvoir aller plus loin dans cette étude, il faut se faire une idée de la distribution magnétique à l'intérieur de la plaque.

Supposons le champ produit par un pôle magnétique  $A_0$  de masse unité (fig. 5).

Soient

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

les équations des deux plans limitant la plaque, et soit  $-a$  la coordonnée du pôle  $A_0$  ; d'ailleurs comme ce pôle est hors de la plaque :

$$a > a.$$

Désignons par  $v_0$  le potentiel magnétique qui serait dû au pôle  $A_0$  s'il n'y avait pas de fer, et désignons par V le potentiel magnétique réel.

On a :

$$V \neq v_0$$

à cause précisément de la présence de la lame de fer. C'est cette fonction V que nous nous proposons de déterminer.

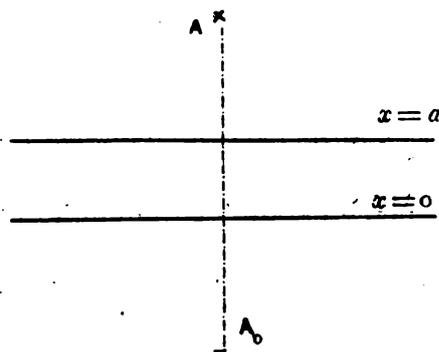


Fig. 5.

Nous emploierons pour cela la méthode dite des images.

Considérons les deux séries de points :

$$\begin{array}{ll}
 A_1 & x = +\alpha & A_0 & x = -\alpha \\
 A_2 & x = 2a + \alpha & A_{-1} & x = -2a - \alpha \\
 A_3 & x = 4a + \alpha & A_{-2} & x = -4a - \alpha \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_n & x = 2(n-1)a + \alpha & A_{-n} & x = -2na - \alpha.
 \end{array}$$

Il est évident que le point  $A_n$  est symétrique de  $A_{1-n}$  par rapport au plan  $x=0$  et qu'il est symétrique du point  $A_{2-n}$  par rapport au plan  $x=a$ .

Appelons  $v_i$  le potentiel dû à une masse unité, en l'absence de tout fer, située au point  $A_i$ . A cause de la symétrie par rapport au plan  $x=0$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_n)_{x=0} = (v_{1-n})_{x=0} \\ \left(\frac{dv_n}{dx}\right)_{x=0} = -\left(\frac{dv_{1-n}}{dx}\right)_{x=0} \end{array} \right. \quad (1)$$

De même, à cause de la symétrie par rapport au plan  $x=a$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_n)_{x=a} = (v_{2-n})_{x=a} \\ \left(\frac{dv_n}{dx}\right)_{x=a} = -\left(\frac{dv_{2-n}}{dx}\right)_{x=a} \end{array} \right. \quad (2)$$

Désignons enfin plus particulièrement par

$$\begin{array}{lll}
 V_1 & \text{le potentiel magnétique dans la région } x < 0 \\
 V_2 & \text{---} & \text{---} & 0 < x < a \\
 V_3 & \text{---} & \text{---} & x > a.
 \end{array}$$

Je dis que :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= v_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i v_i \\
 V_2 &= \sum_{i=1}^{i=\infty} \beta_i v_i + \sum_{i=0}^{i=\infty} \gamma_i v_{-i} \\
 V_3 &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \delta_i v_{-i}
 \end{aligned}$$

les  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant des constantes convenablement choisies.

En effet, à quelles conditions doit satisfaire le potentiel  $V$  produit par le pôle  $A_0$  ?

1°  $V$  doit être une fonction continue ainsi que ses dérivées en tous les points de l'espace excepté en  $A_0$ .

2° En tout point de l'espace  $\Delta V = 0$ .

3° A l'infini on a  $V = 0$ .

4° Sur les surfaces de séparation des milieux, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_1)_{x=0} = (V_2)_{x=0} \\ (V_1)'_{x=0} = \mu(V_2)'_{x=0}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_2)_{x=a} = (V_3)_{x=a} \\ (V_2)'_{x=a} = \mu(V_3)'_{x=a}. \end{array} \right.$$

(Ici  $V'_i$  par exemple indique la dérivée de  $V_i$  par rapport à  $x$ , etc...)

Les expressions que nous avons données relativement à  $V_1, V_2, V_3$  satisfont-elles à ces conditions ?

1° Ces fonctions ne peuvent devenir infinies que si l'une des fonctions  $v$  le devient, et une fonction telle que  $v_i$  ne peut présenter de discontinuité qu'au pôle  $A_i$ .

Donc  $V_2$  est continue dans la région  $0 < x < a$  puisqu'il n'y a aucun pôle magnétique dans cette région. De même  $V_3$  est continue dans toute la région  $x > a$  puisque dans cette région il n'y a que des pôles  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et aucun des pôles  $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$

Enfin, pour la même raison,  $V_1$  est continue en tous les points de la région  $x < 0$  sauf au point  $A_0$ .

Donc la fonction  $V$  est continue en tous les points de l'espace, ainsi que ses dérivées, excepté au point  $A_0$ .

2° En tout point de l'espace on a :

$$\Delta v_i = 0.$$

Donc :

$$\Delta V_1 = 0 = \Delta V_2 = \Delta V_3$$

ou si on veut

$$\Delta V = 0.$$

3° A l'infini :

$$v_i = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 & x &= -\infty \\ V_3 &= 0 & x &= +\infty. \end{aligned}$$

4° Restent les conditions que doivent remplir  $V_1, V_2, V_3$  sur les surfaces de séparation des milieux.

C'est justement en écrivant que les 4 conditions, indiquées plus haut, sont satisfaites, que nous allons déterminer les coefficients.

On devra avoir les identités suivantes :

$$\begin{aligned} v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \dots &= \beta_1 v_1 + \dots + \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_{-1} + \dots + \gamma_{n-1} v_{1-n} \\ v'_0 + \alpha_1 v'_1 + \dots + \alpha_n v'_n &= \mu(\beta_1 v'_1 + \dots + \gamma_0 v'_0 + \gamma_1 v'_{-1} + \dots + \gamma_{n-1} v'_{1-n}) \\ \delta_0 v_0 + \delta_1 v_1 + \dots + \delta_n v_{-n} &= \beta_1 v_1 + \dots + \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_{-1} + \dots + \gamma_{n-1} v_{1-n} + \dots \\ \delta_0 v'_0 + \delta_1 v'_{-1} + \dots + \delta_n v'_{-n} &= (\beta_1 v'_1 + \dots + \gamma_0 v'_0 + \gamma_1 v'_{-1} + \dots + \gamma_{n-1} v'_{1-n} + \dots) \mu \end{aligned}$$

les 2 premières identités ayant lieu pour  $x = 0$  ;

les 2 dernières identités ayant lieu pour  $x = a$ .

En tenant compte des conditions (1) et (2), et égalant les coefficients des termes semblables, il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \alpha_1 &= \beta_2 + \gamma_0 \\ \alpha_2 &= \beta_3 + \gamma_1 \\ \alpha_3 &= \beta_4 + \gamma_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \alpha_n &= \beta_n + \gamma_{n-1} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} -1 + \alpha_1 &= \mu(\beta_1 - \gamma_0) \\ \alpha_2 &= \mu(\beta_2 - \gamma_1) \\ \alpha_3 &= \mu(\beta_3 - \gamma_2) \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \alpha_n &= \mu(\beta_n - \gamma_{n-1}) \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \delta_0 &= \beta_2 + \gamma_0 \\ \delta_1 &= \beta_3 + \gamma_1 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \delta_n &= \beta_{n+2} + \gamma_n \\ \beta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \delta_0 &= -\mu\beta_2 + \mu\gamma_0 \\ \delta_1 &= -\mu\beta_3 + \mu\gamma_1 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \delta_n &= -\mu\beta_{n+2} + \mu\gamma_n \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire facilement, en posant :

$$\lambda = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$$

$$\alpha_1 = -\lambda$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{\mu + 1} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \beta_1 = 0 & \gamma_1 = \lambda^2 \gamma_0 \\ \beta_2 = \lambda \gamma_0 & \gamma_2 = \lambda^4 \gamma_0 \\ \beta_3 = \lambda^3 \gamma_0 & \gamma_3 = \lambda^6 \gamma_0 \\ \beta_4 = \lambda^5 \gamma_0 & \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots & \gamma_n = \lambda^{2n} \gamma_0 \\ \beta_n = \lambda^{2n-3} \gamma_0 & \dots \dots \dots \end{array}$$

La fonction V est donc complètement déterminée.

Si nous nous en tenons à la fonction V<sub>2</sub> qui est celle qui nous intéresse actuellement, on voit que ses coefficients forment 2 progressions géométriques de raison λ<sup>2</sup>, de sorte que le potentiel à l'intérieur de la plaque est le même que si nous avions une série de pôles de même signe, placés à une distance 2a les uns des autres et décroissant en progression géométrique de raison

$$\lambda^2 = \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2.$$

En particulier, si la perméabilité μ est très grande, la progression décroît très lentement; si on a :

$$\mu \approx 1,$$

c'est-à-dire s'il n'y a pas de fer, tous les termes s'annulent à l'exception du terme γ<sub>0</sub>v<sub>0</sub> et on retrouve dans ce cas :

$$V_2 = \gamma_0 v_0 = \frac{2}{\mu + 1} v_0 = v_0.$$

INTENSITÉ DES COURANTS DE FOUCAULT.

On peut maintenant se rendre compte de l'intensité du champ à l'intérieur de la plaque, car il suffit d'ajouter entre eux les effets de toutes les mesures magnétiques envisagées séparément.

Nous pouvons admettre que la plupart des lignes de force, après avoir traversé l'entrefer de AB en CD (fig. 6), vont de CD en C'D' à travers la plaque vibrante, puis traversent de nouveau l'entrefer de C'D' à A'B'. Il en résulte que le champ d'induction magnétique est assez considérable dans la plaque entre CD et C'D' et est sensiblement parallèle à la direction de la plaque, et cela justement parce qu'il se concentre en grande partie dans une plaque très mince.

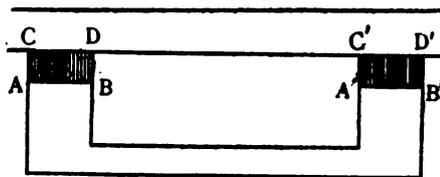


Fig. 6.

Ceci posé, nous avons vu que la chaleur Joule produite par ces courants était

$$\mu^2 C x'^2 dt \int \left[ \left( \frac{d\Omega}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\Omega}{dz} \right)^2 \right] d\tau = R x'^2 dt$$

l'intégrale étant étendue à tout le volume de la plaque.

Calculons R.

Pour cela donnons-nous les dimensions du système :

Nous supposons que la plaque a une surface de 1 centimètre carré et une épaisseur de 0<sup>mm</sup>,1; quant au noyau il a une section de 10 millimètres carrés, soit 2 millimètres dans le plan de la figure et 5 millimètres en profondeur.

Le champ d'induction magnétique est à peu près de 1000 unités c. g. s. dans l'entrefer, par suite dans la plaque, la section de passage du flux étant 10 fois plus petite, cette induction devient égale à 10000.

Si nous la supposons uniforme on aura donc :

$$\mu^2 \left[ \left( \frac{d\Omega}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\Omega}{dx} \right)^2 \right] = (10^4)^2 = 10^8$$

$$C = 10^{-4}$$

et enfin :

$$\int d\tau = 1 \text{ cm}^2 \times 0^{\text{mm}}, 1 = 10^{-2}$$

Donc finalement

$$R_{\text{c. g. s.}} = 10^8 \times 10^{-4} \times 10^{-2} = 100.$$

### C. — Application de cette théorie au récepteur téléphonique.

Nous allons maintenant introduire les courants de Foucault dans les équations précédemment trouvées.

Soient  $j$  et  $j_1$  les intensités moyennes des courants de Foucault dans le noyau et dans la plaque.

On peut écrire, en reprenant notre fonction  $H'$  du début :

$$H' = \frac{mx'^2}{2} + \psi$$

$\psi$  étant un polynôme homogène du 2<sup>e</sup> degré en  $i, j, j_1$  et  $x$

On aura :

$$H' = \frac{mx^2}{2} + \frac{Li^2}{2} + M'ix + \frac{Kx^2}{2} + \frac{Aj^2}{2} + Bij + Cjx + \frac{Dj_1^2}{2} + Gij_1 + Pj_1x + Qjj_1$$

d'où on peut déduire quatre équations de Maxwell :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial x'} \right) - \frac{dH'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial i} \right) = E - R_i,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial j} \right) = -S_j,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H'}{\partial j_1} \right) = -S_1 j_1.$$

Les deux premières équations ont déjà été obtenues au début de ces leçons, lorsqu'on négligeait les courants de Foucault dans le récepteur. Les 2 dernières sont relatives à ces courants ;  $S_j j^2$  et  $S_1 j_1^2$  sont respectivement les quantités de chaleur qu'ils dégagent dans le noyau et dans la plaque.

En développant ces équations on trouve :

$$\begin{cases} (m\omega^2 + k)x = M'i + Cj + Pj_1, \\ (L\omega + R)i = M'\omega x + B\omega j + G\omega j_1 = E, \\ (A\omega + S)j + B\omega i + C\omega x + Q\omega j_1 = 0, \\ (D\omega + S_1)j_1 + G\omega i + P\omega x + Q\omega j = 0. \end{cases}$$

Remarquons qu'en réalité le système est beaucoup plus compliqué, car nous avons vu que ces coefficients que nous supposons constants dépendent en réalité de  $\omega$ .

Nous allons cependant étudier le système en les supposant constants.

Remarquons d'abord que dans le cas pratique où les noyaux sont circulaires ou rectangulaires, les courants de Foucault qui s'y produisent ont été complètement étudiés, et on pourrait déterminer les coefficients A, B, C. En outre si nous supposons

$$D = G = Q = 0$$

les résultats seraient simplifiés.

On aurait en effet :

$$(m\omega^2 + k)x = M'i + Cj + Pj_1$$

$$S_1 j_1 + P\omega x = 0$$

et en combinant ces 2 équations :

$$(m\omega^2 + \frac{P^2}{S_1} \omega + k)x = M'i + Cj.$$

Le coefficient  $\frac{P^2}{S_1}$  joue ici le rôle du coefficient que nous avons appelé plus haut F.

D'autre part la chaleur de Joule produite par les courants de la plaque est pendant l'unité de temps :

$$S_1 j_1^2 = \frac{P^2}{S_1} \omega^2 x^2 = \frac{P^2}{S_1} x'^2.$$

Donc  $\frac{P^2}{S_1}$  est précisément le coefficient que nous avons appelé R et que nous avons trouvé égal à 100. Comme nous avons vu que :

$$m = 1^{67},$$

$$k = 3.10^6,$$

on voit que l'influence des courants de la plaque n'est pas très considérable, mais qu'elle n'est pas négligeable. Elle est même plutôt utile, car elle introduit dans les oscillations propres du système un petit amortissement et atténue ainsi les effets de résonance et l'influence fâcheuse de la période variable.

Mais nous avons négligé les coefficients D, G, Q ; reste à voir si nous en avons le droit. Pour cela, il faut étudier la signification physique de ces constantes.

1° D est le coefficient de  $j_1^2$  ; c'est donc le terme qui représente la self-induction due aux courants de la plaque eux-mêmes ; or ces courants sont disposés en filets parallèles, placés à peu près dans le même plan, puisque la plaque est extrêmement mince par rapport à sa largeur ; donc l'induction de ces tubes les uns sur les autres est très faible ; nous admettrons donc qu'on peut négliger D.

2° G est le coefficient de  $ij_1$  ; il représente donc l'induction mutuelle du circuit de la bobine sur le circuit de la plaque, due à ce que le courant  $i$  est variable.

Si nous représentons en plan (fig. 7) la plaque avec les 2 noyaux, le flux d'induction qui vient de l'entrefer pénètre normalement et, puisqu'il varie comme le courant  $i$  qui contribue à le produire en se superposant au champ permanent, il donne naissance à des courants induits, parallèles au plan de la plaque, ayant des circuits dirigés suivant les lignes équipotentielles magnétiques représentées en trait pointillé sur la figure.



Fig. 7.

..

Comparons la valeur des courants ainsi produits à celle des courants qui résultent du mouvement de la plaque dans le champ.

D'après les données expérimentales, l'attraction permanente des noyaux sur la plaque est de 33 grammes. Quand on fait passer dans la bobine un courant de  $0^A,01$  il en résulte une attraction supplémentaire de  $0^{67},3$  et une flexion de  $1\mu$ . Comme la force d'attraction varie comme le carré du champ, on peut écrire :

$$k(h + h_1 i)^2 = 33^{67} + 0^{67},3$$

et en remarquant que :

$$kh^2 = 33^{67}$$

et négligeant  $i^2$  :

$$kh^2 - 2khh_1 i = 33^{67} + 0^{67},3$$

d'où :

$$2khh_1 i = \frac{1}{100} kh^2$$

$$h_1 i = \frac{1}{200} h.$$

Donc un courant de  $0^A,01$  produit un accroissement du champ de 0,5 %.

D'autre part, en vertu de ce même courant, la plaque se déplace de  $1\mu$ ; elle se déplace donc de  $1/100$  de son épaisseur, et comme nous la supposons uniformément remplie de lignes de force, on peut dire approximativement que le champ à l'intérieur de la plaque a varié d'environ 1 %. Donc les variations de flux produites dans ces 2 cas sont de même ordre, et on n'a pas le droit de négliger G devant P.

3° Q est le coefficient du terme  $jj_1$ ; c'est donc l'induction mutuelle des 2 courants de Foucault l'un sur l'autre. Or, comme nous avons vu que l'on ne pouvait négliger ni l'induction mutuelle des courants de la bobine sur ceux de la plaque (terme G), ni l'induction mutuelle des courants de la bobine sur ceux du noyau (terme C); on peut en conclure qu'on n'a pas le droit de négliger l'induction mutuelle des courants du noyau sur ceux de la plaque.

En résumé, si D est négligeable, G et Q ne le sont pas et il faudra intégrer le système complet, ce qui d'ailleurs ne présente pas d'intérêt particulier.

(A suivre.)

Henri POINCARÉ.

## PROPRIÉTÉS ET APPLICATIONS INDUSTRIELLES DE L'ARC ÉLECTRIQUE PRODUIT AU MOYEN D'ÉLECTRODES EN CHARBONS MÉLANGÉS DE SUBSTANCES MINÉRALES<sup>(1)</sup>.

LES DIFFÉRENTES ESPÈCES D'ÉLECTRODES ET D'ARCS  
ÉLECTRIQUES EMPLOYÉS ACTUELLEMENT DANS LA  
TECHNIQUE DE L'ÉCLAIRAGE ÉLECTRIQUE.

Jusqu'à une époque récente, on ne connaissait guère comme moyen d'éclairage par arc,

que l'arc entre charbons, non pas qu'on n'eût essayé l'emploi d'autres électrodes, comme on le rappellera plus loin, mais, après des expériences souvent mal faites et trop vite généralisées, on était arrivé à la conviction que le

<sup>(1)</sup> Communication faite au Congrès de Saint-Louis, 1904.  
— Cette communication, publiée en anglais seulement, ayant onné lieu, dans ces derniers temps, à des références nombreuses ans la presse technique, plusieurs de nos lecteurs nous ont

exprimé le regret de n'en pas trouver d'édition française. C'est pourquoi nous avons cru opportun, à l'occasion d'une nouvelle étude complémentaire de M. BLONDEL, présentée à la dernière séance de la Société des Électriciens, de publier cette communication *in extenso*.  
N. D. L. R.

# L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Electriques — Mécaniques — Thermiques

DE

## L'ÉNERGIE

### DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — A. BLONDEL, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. — Éric GÉRARD, Directeur de l'Institut Électrotechnique Montefiore. — M. LEBLANC, Professeur à l'École des Mines. — G. LIPPMANN, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — D. MONNIER, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — H. POINCARÉ, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — A. WITZ, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.

### ÉTUDE DU RÉCEPTEUR TÉLÉPHONIQUE (*Fin*) (1)

#### VI. — ÉTUDE DE L'HYSTÉRÉSIS

Soit  $B$  l'induction magnétique d'un noyau de fer et soit  $H$  le champ magnétisant.

A un accroissement  $dH$  de la force magnétisante correspond un accroissement  $dB$  de l'induction magnétique et :

$$\frac{dB}{dH} = \varphi(B, H).$$

Cette fonction n'est pas la même suivant que  $dH$  est positif ou négatif ; par suite si on pouvait intégrer l'équation, on obtiendrait 2 familles distinctes de courbes. Comme, dans le cas actuel, le fer est loin de la saturation, et que les variations du champ sont toujours faibles, nous pourrions remplacer  $\varphi$  par une constante qui aura deux valeurs différentes suivant le signe de  $dH$ .

Donc nous écrivons :

$$\begin{aligned} dB &= \lambda_1 dH & dH > 0, \\ dB &= \lambda_2 dH & dH < 0. \end{aligned}$$

Si  $i$  est le courant magnétisant et s'il croît de  $di$ , il se produit dans le champ un accroissement  $dH$ . Cet accroissement se décompose en 2 parties :

L'une due directement au courant qui se produirait si le milieu n'était pas magnétique ;  
Et l'autre due à la variation de l'aimantation du noyau.

(1) *Éclairage Électrique*, t. L, 16 mars 1907, p. 365.

On posera donc :

$$dH = \alpha di + \beta aB = \alpha di + \beta \lambda dH$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes ;

d'où

$$\frac{dH}{di} = \frac{\alpha}{1 - \beta \lambda_1} = \mu_1 \quad di > 0,$$

$$\frac{dH}{di} = \frac{\alpha}{1 - \beta \lambda_2} = \mu_2 \quad di < 0.$$

Soit maintenant un son simple, et soit :

$$i = \sin \omega t$$

le courant correspondant, représenté ainsi par une sinusoïde, dont nous supposons l'amplitude égale à 1. Pendant que  $i$  augmente,  $H$  décrit un arc de sinusoïde d'amplitude  $\mu_1$ .

Lorsque  $i$  diminue  $H$  décrit un deuxième arc de sinusoïde qui se raccorde au premier et dont l'amplitude est  $\mu_2$ , et ainsi de suite ; la courbe de  $H$  est donc déformée par rapport à celle de  $i$  et elle renferme des harmoniques d'ordre supérieur.

On peut même aller plus loin : soit un son composé de 2 sons simples :

$$\begin{aligned} i &= A \sin \omega t + A' \sin \omega' t \\ &= i_1 + i_2. \end{aligned}$$

Si les 2 sons simples étaient séparés, on aurait 2 champs distincts  $H_1$  et  $H_2$ , et on aurait :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= \mu_1 A \omega \cos \omega t \\ \frac{dH_2}{dt} &= \mu_2 A' \omega' \cos \omega' t. \end{aligned} \right.$$

en prenant  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  suivant que les fonctions sont croissantes ou décroissantes.

Supposons qu'à un instant donné la première fonction soit croissante et la deuxième décroissante :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= \mu_1 A \omega \cos \omega t \\ \frac{dH_2}{dt} &= \mu_2 A' \omega' \cos \omega' t. \end{aligned} \right.$$

Les 2 sons étant simultanés, la fonction  $i$  qui est une somme de 2 fonctions, l'une croissante, l'autre décroissante, peut être croissante.

En ce cas, le champ résultant  $H$  est lié à  $i$  par la relation :

$$dH = \mu_1 di$$

ou :

$$\frac{dH}{dt} = \mu_1 A \omega \cos \omega t + \mu_1 A' \omega' \cos \omega' t.$$

On voit donc que dans ce cas on, a forcément :

$$\frac{dH}{dt} \neq \frac{dH_1}{dt} + \frac{dH_2}{dt}$$

ou :

$$H \neq H_1 + H_2.$$

Donc l'effet de l'hystérésis serait de déformer les sons les plus purs et d'y introduire des harmoniques. Il nous paraît d'ailleurs que cet effet est absolument négligeable vis-à-vis des courants de Foucault.

Enfin la perte par hystérésis est en watts :

$$NV\eta B^{1.6}$$

$N$  étant la fréquence,  $V$  le volume du fer,  $\eta$  un coefficient qui dépend de la nature du métal,  $B$  l'induction magnétique.

Nous prendrons ici :

$$\begin{aligned} N &= 1000, \\ \eta &= 0,004, \\ \beta &= 10\,000, \\ V &= 10^{-3}. \end{aligned}$$

Tout calcul fait on trouve pour cette perte de puissance dans la plaque :

$$10\,044 \times 10^3 \times 10^{-2} \times 10^{-7} = 10^{-2} \text{ environ.}$$

Or nous avons vu que la perte de puissance par seconde produite par les courants de Foucault de la plaque était

$$Rx'^2 = 100 \times \omega^2 x^2 = 100 \times \frac{4\pi^2}{10^{-6}} \times 10^{-8} = 4\pi^2.$$

Donc la perte par hystérésis est moins de 1/3 000 de la perte par courants de Foucault.

## VII. — INFLUENCE DE LA LIGNE

Nous avons supposé jusqu'à présent le récepteur et le transmetteur réunis par une ligne très courte ; il faudrait voir maintenant quelle est l'influence d'une ligne un peu longue.

On sait que la propagation dépend d'une équation aux dérivées partielles ; le récepteur et le transmetteur agissent sur les conditions aux limites.

Dans des paragraphes précédents on étudie une fonction :

$$\Phi = \frac{\gamma i}{\omega}$$

$\gamma$  étant un coefficient qui dépend de la ligne.

Si on appelle  $\Phi$  et  $V$ ,  $\Phi'$  et  $V'$  les valeurs qui prennent cette fonction et le potentiel en amont et en aval de l'appareil, on peut dire que, quelle que soit la complication d'un récepteur, il est toujours caractérisé par ce fait qu'il y aura 2 relations linéaires entre ces 4 quantités et leurs dérivées partielles par rapport au temps.

La connaissance de ces relations permet de résoudre le problème dans les cas les plus compliqués.

Nous allons rechercher ce que deviennent ces relations dans le cas qui nous occupe.

Ici, il n'y a pas de capacité ; donc l'intensité est la même en amont et en aval, d'où

$$\Phi = \Phi' \quad (1^{\text{re}} \text{ relation}).$$

En outre  $E$  étant la différence de potentiel aux bornes du téléphone, on a :

$$E = V - V'.$$

Si maintenant on élimine  $x$ ,  $j$ ,  $j_1$  entre les 4 équations (A) on trouve ( $\pi$  et  $\pi_1$  étant 2 polynômes entiers en  $\omega$ ) :

$$\pi(\omega) \times i = \pi_1(\omega) \times E$$

Ou bien :

$$\omega \pi(\omega) \frac{\Phi}{\gamma} = \pi_1(\omega) \times (V - V').$$

Or :

$$\omega^k \Phi = \frac{d^k \Phi}{dt^k},$$

$$\omega^k V = \frac{d^k V}{dt^k},$$

$$\omega^k V' = \frac{d^k V'}{dt^k}.$$

Donc on a bien ainsi la deuxième relation linéaire entre les 3 fonctions  $\Phi$ ,  $V$ ,  $V'$  et leurs dérivées par rapport au temps.

A l'aide de ces 2 relations on pourra étudier l'influence de la ligne.

Nous n'entrerons pas dans les calculs ; mais nous mentionnerons un cas particulièrement simple : c'est celui où il existe entre les coefficients la relation indiquée antérieurement ; dans ce cas on n'a plus, comme pour une ligne très courte

$$E = E_1$$

$E$  et  $E_1$  étant les différences de potentiel entre les bornes du récepteur et du transmetteur, on trouve :

$$E = kE_1$$

$k$  étant un coefficient d'affaiblissement constant.

Dans ce cas, tout se passerait comme sur une ligne très courte ; il se produirait seulement un affaiblissement du son.

Henri POINCARÉ.

## NOTE SUR L'INFLUENCE D'UNE CAPACITÉ INTERCALÉE DANS LE CIRCUIT SECONDAIRE D'UN TRANSFORMATEUR

SUR LE DÉPHASAGE ENTRE LA FORCE ÉLECTROMOTRICE ET LE COURANT D'UN ALTERNATEUR  
ALIMENTANT LE CIRCUIT PRIMAIRE DE CE TRANSFORMATEUR

Le dispositif formé par un transformateur dont le circuit secondaire contient un condensateur est généralement désigné sous le nom de transformateur à résonance. Ce dispositif est employé dans les postes de télégraphie sans fil.

Seibt a étudié le fonctionnement du transformateur à résonance. Il a été conduit à des calculs compliqués et parfois à des résultats inexacts. Cette étude a été reprise récemment par Benischke (Voir *l'Eclairage Electrique* du 9 février 1907), qui est parti des équations fondamentales des transformateurs.

Ce que nous proposons ici, c'est tout simplement de donner une méthode graphique dans le cas simplifié où les fuites et les pertes par hystérésis sont négligeables.

Un alternateur  $M$  est mis en circuit avec une bobine de self  $L$ , et le primaire  $P_1$  d'un transformateur dont le secondaire  $S_2$  est en court-circuit sur une capacité  $C_2$  (cas des postes de télégraphie sans fil) (fig. 1).

Soit  $R_1$  la résistance du circuit de l'alternateur comprenant self et primaire du transformateur et  $R_2$  la résistance du secondaire du transformateur,  $n_1$  le nombre de tours du circuit