LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE DEUX VARIABLES ET LA REPRÉSENTATION CONFORME.

Mémoire de M. **Henri Poincaré** (Paris).

Adunanza del 27 gennajo 1907.

§ 1. Énoncé du problème.

On sait que la théorie des fonctions analytiques d'une seule variable est intimement liée à celle de la représentation conforme, et quelle clarté cette considération de la représentation conforme a jetée sur les propriétés fondamentales des fonctions. Dans ces conditions, j'ai été tenté de rechercher s'il n'y aurait pas quelque chose d'analogue en ce qui concerne les fonctions de deux variables. Je n'ai obtenu, bien entendu, que des résultats partiels et fragmentaires, mais avant de les exposer, je voudrais rappeler en quelques mots les propositions fondamentales bien connues relatives aux fonctions d'une variable.

On peut se proposer deux problèmes distincts:

Soit $Z = X + iY$ une fonction analytique de $z = x + iy$. Soit dans le plan des z un *arc de courbe* l et sur cet arc un point m; soit dans le plan des Z un autre arc de courbe L et sur cet arc un point M. Est-il possible de déterminer la fonction analytique Z, de telle façon qu'elle soit régulière dans le voisinage du point m; que Z soit au point M quand z est au point m et que Z décrive la courbe L quand z décrit la courbe l? Cela c'est *le problème local,* et l'on sait qu'il comporte une infinité de solutions.

Soit maintenant dans le plan des z une *courbe fermée* l limitant un certain domaine d; soit dans le plan des Z une courbe fermée L limitant un domaine D. Est-il possible de déterminer la fonction analytique Z, de telle façon qu'elle soit régulière dans le domaine d, que Z parcoure la ligne L (ou le domaine D) quand z parcourt la ligne l (ou le domaine d)? Cela c'est *le problème étendu;* et le principe de Dirichlet nous apprend qu'il comporte une solution et une seule.

On peut se poser deux problèmes analogues en ce qui concerne les fonctions de deux variables. Soient $Z = X + iY$ et $Z' = X' + iY'$ deux fonctions analytiques des deux variables complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Nous pouvons envisager l'espace à 4 dimensions des zz' et celui des ZZ'.

Soit alors dans l'espace zz' une portion de surface à 3 dimensions s et sur cette surface un point m. Soit dans l'espace des ZZ' une portion de surface à 3 dimensions S et sur cette surface un point M. Est-il possible de déterminer les fonctions Z et Z' de telle façon qu'elles soient régulières dans le voisinage du point m, que le point ZZ' soit en M quand le point zz' est en m et qu'il décrive S quand le point zz' décrit s? C'est le *problème local.*

Soit maintenant dans l'espace des zz' une surface *fermée* à 3 dimensions s limitant un domaine à 4 dimensions d. Soit dans l'espace ZZ' une surface fermée à 3 dimensions S limitant un domaine D. Est-il possible de déterminer les fonctions Z et Z' de telle façon qu'elles soient régulières dans le domaine d, que le point ZZ' parcoure S ou D quand le point zz' parcourt s ou d? C'est le *problème étendu.*

Dans le cas où ce problème étendu est susceptible d'une solution, on ne saurait dire, sans un abus de langage, que cette solution nous fournit la *représentation conforme* de d sur D. Ce mot de représentation conforme suppose en effet la conservation des angles. Nous dirons donc simplement que nous obtenons ainsi la représentation *régulière* de d sur D.

Une première remarque, presque évidente, c'est que le problème local ne comporte pas toujours une solution. En effet les fonctions X, Y, X', Y' doivent satisfaire aux équations différentielles:

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dy}, \quad \frac{dX}{dy}=-\frac{dY}{dx} \tag{1}$$

et à trois autres systèmes analogues que l'on déduit de (1) en accentuant, soit les lettres X et Y, soit les lettres x et y, soit les quatre lettres à la fois. Ces quatre systèmes réunis forment un système (1^{bis}). Soient alors:

$$x=\varphi(y, x', y'), \qquad X=\Phi(Y, X', Y')$$

les équations des surfaces s et S. Supposons alors que le point zz' reste sur la surface s et exprimons tout en fonction de y, x', y'.

Désignons par des ∂ ronds les dérivées partielles prises par rapport à ces trois variables, x étant liée à ces trois variables par l'équation de la surface $x=\varphi$. Continuons à désigner par des d ordinaires les dérivées par rapport aux 4 variables supposées indépendantes. Nous aurons alors:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{dX}{dy}+\frac{dX}{dx}\frac{d\varphi}{dy} \tag{2}$$

plus onze autres équations que l'on déduira de (2) en changeant y en x' ou en y'; ou bien X, en Y, X' ou Y'. L'ensemble de ces 12 équations formera le système (2^{bis}).

Si alors entre les 8 équations (1^{bis}) et les 12 équations (2^{bis}) on élimine les 16 dérivées partielles $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dX}{dy}$, etc., il restera 4 équations linéaires entre les 12 dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial y}$, etc.; c'est ce que nous appellerons le système (3).

D'autre part, si le point ZZ' reste sur la surface S dont l'équation est $X = \Phi$, on aura:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dY}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{d\Phi}{dX'}\frac{\partial X'}{\partial y} + \frac{d\Phi}{dY'}\frac{\partial Y'}{\partial y} \tag{4}$$

avec deux autres équations déduites de (4) en changeant y en x' ou y' et qui avec (4) formeront le système (4^{bis}). On remplacera dans le système (3) les trois dérivées

$$\frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial x'}, \quad \frac{\partial X}{\partial y'}$$

par leurs valeurs données par le système (4^{bis}) et il restera 4 équations entre les trois fonctions inconnues Y, X', Y' et leurs dérivées partielles par rapport aux variables indépendantes y, x', y'. On aurait donc à trouver *trois* fonctions inconnues satisfaisant à *quatre* équations différentielles, ce qui en général est impossible.

§ 2. Principes de la classification des surfaces.

A ce point de vue les surfaces s peuvent se répartir en plusieurs classes.

Il peut arriver qu'aucune transformation ne transforme s en elle-même. Je m'explique; les transformations que je vais envisager sont celles qui changent le point x, y, x', y' dans le point X, Y, X', Y' de telle façon que $X + iY$ et $X' + iY'$ soient fonctions analytiques de $x + iy$ et $x' + iy'$.

Ce sont les transformations que j'ai envisagées dans le § précédent, ce sont les seules que, sauf avis contraire, j'envisagerai désormais.

Qu'arrive-t-il alors si aucune transformation de cette forme ne transforme s en elle-même? Il en résulte évidemment que si le *problème local* comporte une solution, il n'en comporte certainement qu'une. Car si deux transformations T et T_1 changeaient s en S, la transformation inverse T_1^{-1} changerait S en s, de sorte que la combinaison TT_1^{-1} changerait la surface s en elle-même.

Nous verrons plus loin comment on peut dans ce cas reconnaître si le problème local comporte une solution par des calculs qui peuvent être longs mais qui restent élémentaires.

Si au contraire il existe des transformations qui changent s en elle-même, le problème local ne saurait comporter une solution sans en comporter plusieurs. Nous sommes ainsi conduits à étudier les transformations des surfaces s en elles-mêmes et à fonder sur ces transformations et les groupes qu'elles forment une classification de ces surfaces.

Nous nous attacherons surtout aux groupes continus formés de semblables transformations. Soit s une surface quelconque; soit G le groupe de s, c'est-à-dire le groupe des transformations qui n'altèrent pas s; soit s' une autre surface, soit G' le groupe de s'.

Soient

$$T_1, \quad T_2, \ldots$$

les diverses substitutions de G. Si le groupe G' est le transformé de G par une transformation U quelconque, c'est-à-dire si les diverses transformations de G' sont

$$U^{-1}T_1U, \quad U^{-1}T_2U, \ldots$$

nous dirons que G et G', ou bien encore que s et s' appartiennent à la même classe.

Pour que le problème local soit possible, il est évidemment nécessaire que s et S appartiennent à la même classe et par conséquent que leurs groupes soient isomorphes.

§ 3. Classification des groupes.

Je ne ferai pour le moment intervenir dans la classification des surfaces s que les transformations infinitésimales de ces surfaces en elles-mêmes; de sorte que nous avons à rechercher les groupes *continus* G qui n'altèrent pas ces surfaces, et parmi ces groupes continus nous sommes d'abord amenés à distinguer les groupes continus *finis* et les groupes continus *infinis*.

Envisageons d'abord les groupes continus finis. Leurs substitutions doivent, comme nous l'avons dit, être de la forme suivante:

$$[z, z', z_0, z'_0; f(z, z'), f'(z, z'), f_0(z_0, z'_0), f'_0(z_0, z'_0)],$$

où z et z' sont les variables complexes $x+iy$ et $x'+iy'$, où z_0 et z'_0 sont leurs imaginaires conjuguées $x-iy$ et $x'-iy'$, où $f(z, z')$, $f'(z, z')$ sont des fonctions analytiques de z et de z', et où $f_0(z_0, z'_0)$, $f'_0(z_0, z'_0)$ sont imaginaires conjuguées de $f(z, z')$, $f'(z, z')$. Si nous considérons le groupe formé par les substitutions

$$[z, z'; f(z, z'), f'(z, z')]$$

en nous abstenant momentanément de considérer z_0 et z'_0, ce groupe est un groupe continu fini à 2 variables.

Or on sait former tous les groupes continus finis à 2 variables; les méthodes de LIE permettent de le faire. Je me bornerai à renvoyer à LIE lui-même *) ou bien à CAMPBELL **).

On verra que ces groupes se ramènent à 27 types dont les principaux sont le groupe linéaire général à deux variables et ses sous-groupes, le groupe des substitutions linéaires à une variable portant séparément sur z et sur z', le groupe

$$(q, xq, \ldots, x^r q, yq, p, xp, x^2p + rxyq)$$

et leurs sous-groupes.

Toutefois ces groupes ne sont pas ainsi mis encore sous la forme qui nous convient. En effet dans la théorie générale des groupes, on considère un groupe d'ordre

---

*) SOPHUS LIE, *Theorie der Transformationsgruppen,* III. Abschnitt, Abtheilung 1 et 2 (Leipzig, Teubner, 1893).

**) CAMPBELL, *Introductory Treatise on* LIE'*s Theorie of Finite Continuous Transformation Groups* (Oxford, Clarendon Press, 1903).

r comme dérivé de r substitutions infinitésimales

$$\tau_1,\quad \tau_2,\ \ldots,\ \tau_r$$

et alors toutes les transformations infinitésimales du groupe sont de la forme

$$\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + \cdots + \alpha_r\tau_r,$$

où les coefficients α_1, α_2, ... α_r sont *réels* ou *imaginaires.*

Au contraire, dans des recherches comme celle-ci, il convient de définir un groupe dérivé de r substitutions infinitésimales

$$\tau_1,\quad \tau_2,\ \ldots,\ \tau_r$$

celui dont toutes les transformations infinitésimales sont de la forme

$$\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + \cdots + \alpha_r\tau_r,$$

les coefficients α étant tous réels.

Soit, pour prendre un exemple simple, le groupe dont toutes les transformations infinitésimales sont

$$(\alpha + i\beta)\frac{df}{dz} + (\alpha' + i\beta')\frac{df}{dz'},$$

α, β, α', β' étant 4 constantes réelles.

Au point de vue ordinaire, ce groupe est d'ordre 2 et dérive des 2 substitutions fondamentales

$$\frac{df}{dz},\quad \frac{df}{dz'}.$$

Au point de vue nouveau, il est d'ordre 4 et dérive des 4 substitutions fondamentales

$$\frac{df}{dz},\quad i\frac{df}{dz},\quad \frac{df}{dz'},\quad i\frac{df}{dz'}.$$

Pour bien faire comprendre ce qu'il y a à faire, j'opérerai sur le groupe linéaire général. Ce groupe dérive des 8 substitutions fondamentales suivantes (j'écris partout p et p' au lieu de $\frac{df}{dz}$, $\frac{df}{dz'}$):

$$A = p,\quad A' = p';\quad B = zp,\quad B' = z'p';\quad C = z'p,\quad C' = zp'$$
$$D = z(zp + z'p'),\quad D' = z'(zp + z'p'),$$

avec les équations de structure:

$$(A, B) = A,\quad (A', B') = A',\quad (A, C') = A',\quad (A', C) = A$$
$$(A, D) = 2B + B',\quad (A', D') = 2B' + B,\quad (A, D') = C,\quad (A', D) = C'$$
$$(B, C) = -C,\quad (B, C') = C',\ \text{etc.}$$

Au point de vue nouveau, nous devons regarder le groupe comme d'ordre 16 et comme dérivé des 16 substitutions

$$A,\ A',\quad B,\ B',\quad C,\ C',\quad D,\ D'$$
$$iA,\ iA',\quad iB,\ iB',\quad iC,\ iC',\quad iD,\ iD'.$$

Quant aux nouvelles équations de structure, elles se déduiront aisément des anciennes; ainsi l'équation

$$(A, B) = A$$

nous donnera:

$$(A, B) = A, \quad (iA, B) = iA, \quad (A, iB) = iA, \quad (iA, iB) = -A.$$

Le groupe linéaire étant ainsi envisagé comme d'ordre 16 et ses équations de structure étant formées, on aura à rechercher tous ses sous-groupes; on sait qu'il y a des méthodes générales pour les former.

Je citerai seulement quelques exemples; nous pouvons prendre le groupe dérivé des huit substitutions

$$(1) \qquad e^{i\theta}A, \quad e^{i\theta'}A', \quad B, \quad B', \quad e^{i(\theta-\theta')}C, \quad e^{i(\theta'-\theta)}C', \quad e^{-i\theta}D, \quad e^{-i\theta'}D',$$

où θ et θ' sont des angles réels quelconques, ou bien encore:

$$(2) \quad \alpha'C-\alpha C', \quad i(\alpha'C+\alpha C'), \quad iB, \quad iB', \quad A+\alpha D, \quad i(A-\alpha D), \quad A'+\alpha'D', \quad i(A'-\alpha'D'),$$

où α et α' sont des constantes quelconques, réelles ou complexes.

Quand on suppose en particulier $\theta = \theta'$, le groupe (1) se réduit au groupe *réel*

$$(3) \qquad A, \quad A', \quad B, \quad B', \quad C, \quad C', \quad D, \quad D';$$

quand on suppose $\alpha = \alpha' = -1$, le groupe (2) se réduit au groupe

$$(4) \quad C-C', \quad i(C+C'), \quad iB, \quad iB', \quad A-D, \quad i(A+D), \quad A'-D', \quad i(A'+D')$$

qui est celui des transformations qui n'altèrent pas l'hypersphère:

$$zz_0 + z'z'_0 = 1.$$

On peut se demander si ces groupes peuvent toujours se ramener aux *groupes réels* étudiés par LIE (l. c., III. Abschnitt, pages 360 et suiv.). Nous remarquerons d'abord que tous les groupes (1) sont isomorphes et se ramènent au groupe réel (3) par un changement de variables, en posant:

$$z = z_1 e^{i\theta}, \quad z' = z'_1 e^{i\theta'}.$$

De même, tous les groupes (2) sont isomorphes et se ramènent au groupe (4) par un changement de variables, en posant:

$$z = -\alpha z_1, \quad z' = -\alpha' z'_1.$$

Mais il n'y a pas moyen de ramener par un changement de variables analogues le groupe (4) au groupe (3). Le problème que nous nous proposons ici est donc plus général que celui qui a été résolu par LIE dans le chapitre cité. Mais il présente avec lui une grande parenté et il peut être résolu par des procédés analogues sur lesquels nous n'insisterons pas ici.

Supposons donc que l'on ait formé par ces moyens un groupe g d'ordre r, dont toutes les transformations sont de la forme:

$$[z, z'; \ f(z, z'), \ f'(z, z')],$$

f et f' étant analytiques, et dont d'autre part chaque transformation finie est une puissance *réelle* d'une transformation infinitésimale, tandis que chaque transformation infinitésimale est une combinaison linéaire à coefficients *réels* de r transformations fondamentales.

Les considérations qui précèdent permettent de former tous les groupes g qui satisfont à ces conditions; quand on connaitra l'un de ces groupes g on formera immédiatement le groupe G correspondant qui a pour transformations:

$$[z, z', \ z_0, z'_0; \ f(z, z'), f'(z, z'), \ f_0(z_0, z'_0), f'_0(z_0, z'_0)].$$

Mais il n'est pas encore certain qu'à ce groupe G corresponde une classe de surfaces s et c'est ce qu'il nous reste à examiner.

Si le groupe G est d'ordre 1, il existe un système de lignes à une dimension qui sont inaltérées par le groupe, et qui sont définies par des équations différentielles. Toute surface à 3 dimensions engendrée par ces lignes est inaltérée par le groupe; de sorte qu'à ce groupe G correspondront une infinité de surfaces s dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables.

Si le groupe G est d'ordre 2, il existe un système de surfaces à 2 dimensions qui sont inaltérées par le groupe et qui sont définies par des équations différentielles. Toute surface à 3 dimensions engendrée par ces surfaces à 2 dimensions est inaltérée par le groupe; de sorte qu'à ce groupe G correspondront une infinité de surfaces s dépendant d'une fonction arbitraire d'une seule variable.

Si le groupe G est d'ordre 3, il existe un système de surfaces à 3 dimensions qui sont inaltérées par le groupe et qui sont définies par des équations différentielles. A ce groupe G correspondent donc une infinité de surfaces s dépendant d'une constante arbitraire.

Si donc le groupe est d'ordre 3 au plus, il y a toujours une classe correspondante de surfaces s. Qu'arrive-t-il maintenant si le groupe est d'ordre plus élevé? Soient

$$A_1, A_2, \ldots, A_r.$$

les transformations infinitésimales du groupe; on aura:

$$A_k = X_k \frac{df}{dz} + X'_k \frac{df}{dz'} + X_{0k} \frac{df}{dz_0} + X'_{0k} \frac{df}{dz'_0},$$

où X_k et X'_k sont des fonctions de z et z', tandis que X_{0k} et X'_{0k} sont les fonctions imaginaires conjuguées de z_0 et z'_0.

Si f est le 1[er] membre de l'équation de la surface s, la fonction f doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$A_k = 0,$$

sinon identiquement, du moins pour $f = 0$.

Formons donc un déterminant de 4 lignes

$$|X_k \ X'_k \ X_{0k} \ X'_{0k}|,$$

k prenant 4 des r valeurs $1, 2, \ldots, r$. Plusieurs cas peuvent se présenter:

1° Ou bien tous les déterminants ainsi formés s'annulent identiquement; alors le groupe G n'est pas transitif, il existe une infinité de surfaces s, définies par des équations différentielles et dépendant d'une constante arbitraire, et qui ne sont pas altérées par le groupe.

C'est ce qui arrive par exemple pour le groupe dérivé de

$$\begin{aligned} iB &= zp - z_0 p_0, \\ iB' &= z'p' - z'_0 p'_0, \\ C - C' &= z'p - zp' + z'_0 p_0 - z_0 p'_0, \\ i(C + C') &= z'p + zp' - z'_0 p_0 - z_0 p'_0. \end{aligned}$$

J'ai écrit p, p_0, etc., au lieu de $\frac{df}{dz}$, $\frac{df}{dz_0}$, etc. Le groupe étant d'ordre 4, on n'a qu'un seul déterminant,

$$\begin{vmatrix} z & 0 & -z_0 & 0 \\ 0 & z' & 0 & -z'_0 \\ z' & -z & z'_0 & -z_0 \\ z' & z & -z'_0 & -z_0 \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul, et on voit en effet que les surfaces

$$zz_0 + z'z'_0 = K,$$

où K est une constante arbitraire, ne sont pas altérées par le groupe.

2° Ou bien tous les déterminants ne s'annulent pas identiquement; mais ils s'annulent tous à la fois quand on a:

$$F(z, z', z_0, z'_0) = 0. \tag{5}$$

L'équation (5) définit alors une surface à 3 dimensions. Cela nécessite quelques explications. Le 1er membre de l'équation (5) est complexe, de sorte qu'il semblerait que cette équation équivaut à deux équations *réelles* entre x, y, x', y' qui définiraient une surface à *deux* dimensions. Les équations de cette surface à deux dimensions devraient alors s'écrire:

$$\begin{cases} F(z, z', z_0, z'_0) = 0, \\ F_0(z_0, z'_0, z, z') = 0, \end{cases} \tag{5bis}$$

F_0 étant ce que devient F quand on chage i en $-i$ dans ses coefficients.

Mais on doit observer que X_{0k} et X'_{0k} sont imaginaires conjugués de X_k et X'_k. Donc quand on changera i, z, z', z_0, z'_0 en $-i$, z_0, z'_0, z, z', il arrivera que X_k et X_{0k} s'échangeront de même que X'_k et X'_{0k} et les déterminants ne changeront pas. On aura donc:

$$F(z, z', z_0, z_0) = F_0(z_0, z'_0, z, z'),$$

de sorte que les deux équations (5bis) ne sont pas distinctes et définissent par conséquent une surface à 3 dimensions.

S'il existe une surface s inaltérée par le groupe, ce ne pourra être que la surface (5); je dis maintenant que cette surface (5) n'est effectivement pas altérée par le groupe. Soit en effet T une transformation quelconque du groupe; alors les substitutions infinitésimales

$$T^{-1} A_k T$$

seront les transformées par T des substitutions fondamentales A_k du groupe.

Si on forme un déterminant Δ avec 4 substitutions A_k comme on vient de l'expliquer, puis qu'on forme de la même manière un déterminant Δ' avec les 4 substitutions $T^{-1} A_k T$, ce déterminant Δ' sera le transformé de Δ par la transformation T.

F est par définition le plus grand commun diviseur des déterminants Δ; de même le plus grand commun diviseur des déterminants Δ' sera le transformé de F par T.

Mais comme T fait partie du groupe, les substitutions $T^{-1} A_k T$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des A_k; les déterminants Δ' seront donc aussi des combinaisons linéaires des Δ; le plus grand commun diviseur des Δ' sera donc égal à celui des Δ à un facteur constant près. Donc F se reproduit à un facteur constant près quand on lui applique la transformation T. Donc la surface (5) n'est pas altérée par cette transformation. C. Q. F. D.

C'est ce qui arrive par exemple pour le groupe (4) où les fonctions qui jouent le rôle de X_k, etc. sont:

$$\begin{array}{ccccc}
iB & z & 0 & -z_0 & 0 \\
iB' & 0 & z' & 0 & -z'_0 \\
C - C' & z' & -z & z'_0 & -z_0 \\
i(C + C') & z' & z & -z'_0 & -z_0 \\
A - D & 1 - z^2 & -zz' & 1 - z_0^2 & -z_0 z'_0 \\
i(A + D) & 1 + z^2 & zz' & -1 - z_0^2 & -z_0 z'_0 \\
A' - D' & -zz' & 1 - z'^2 & -z_0 z'_0 & 1 - z'^2_0 \\
i(A' + D') & zz' & 1 + z'^2 & -z_0 z'_0 & -1 - z'^2_0.
\end{array}$$

En formant les déterminants Δ on voit qu'ils ont pour plus grand commun diviseur

$$z z_0 + z' z'_0 - 1.$$

Le groupe n'altère donc pas l'hypersphère

$$z z_0 + z' z'_0 = 1.$$

3° Ou bien les déterminants Δ sont premiers entre eux. Dans ce cas il n'y a pas de surface s inaltérée par le groupe G.

C'est ce qui arrive pour le groupe (3); nous voyons en effet que deux de nos déterminants Δ (obtenus respectivement avec les substitutions A, A', B, C' ou A, A', B', C) s'écrivent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & z_0 & 0 \\ 0 & z & 0 & z_0 \end{vmatrix} = (z - z_0)^2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z' & 0 & z'_0 & 0 \\ 0 & z' & 0 & z'_0 \end{vmatrix} = (z' - z'_0)^2$$

et n'ont aucun commun diviseur; les déterminants ne peuvent s'annuler à la fois que si l'on a:

$$z = z^0, \qquad z' = z_0,$$

ce qui définit une surface à 2 et non pas à 3 dimensions.

Je terminerai en citant un exemple d'une classe de surfaces s où le groupe G est continu *d'ordre infini.* Soit en effet la surface

$$z = z_0.$$

Cette surface est évidemment inaltérée par le groupe

$$[z, z', z_0, z_0';\ \varphi(z), f(z, z'), \varphi(z_0), f_0(z_0, z_0')],$$

où φ est une fonction réelle arbitraire, f et f_0 deux fonctions complexes arbitraires, imaginaires conjuguées l'une de l'autre.

§ 4. **Définition des invariants.**

Proposons-nous le problème suivant, analogue au problème local. Soit s une surface quelconque et m un point sur cette surface; soit S une autre surface et M un point sur cette surface. Peut-on trouver une transformation qui change s en S', S' ayant avec S au point M un contact du n^e ordre?

Nous pourrons, sans restreindre la généralité, supposer que m et M sont à l'origine des coordonnées. Nous mettrons alors l'équation de la surface S sous la forme:

$$(1) \qquad F(X, Y, X', Y') = 0$$

et nous supposerons F développé suivant les puissances de X, Y, X', Y'; nous avons besoin, pour notre objet, de connaître ce développement jusqu'aux termes du n^e ordre inclusivement, ce qui suppose:

$$N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24} - 1$$

coefficients arbitraires, que nous appellerons les coefficients A; mais nous pouvons aussi, sans restreindre la généralité, supposer que F est de la forme

$$F = X - \Phi(Y, X', Y')$$

et il ne reste plus alors que

$$N' = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1$$

coefficients arbitraires réels que nous appellerons les coefficients A'.

L'équation de la surface s pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad x = \varphi_1(u, v, w), \quad y = \varphi_2(u, v, w), \quad x' = \varphi_3(u, v, w), \quad y' = \varphi_4(u, v, w),$$

φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 étant 4 fonctions réelles développables suivant les puissances de 3 paramètres u, v, w; nous avons besoin de ce développement jusqu'aux termes du n^e ordre inclusivement, ce qui suppose $4N'$ coefficients arbitraires réels que nous appellerons les coefficients B.

Ici encore ce nombre peut être réduit; car nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer

$$y = u, \quad x' = v, \quad y' = w$$

et il ne reste plus alors que N' coefficients arbitraires réels que j'appellerai les coefficients B'.

Enfin, les équations de la transformation peuvent s'écrire:

$$Z = \psi(z, z'), \quad Z' = \psi_1(z, z'), \tag{3}$$

ψ et ψ_1 étant deux fonctions analytiques complexes développables suivant les puissances de z et de z': nous avons besoin des termes jusqu'au n^e ordre, ce qui fait

$$2\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right]$$

coefficients arbitraires complexes, ou, ce qui revient au même,

$$N'' = 2n^2 + 6n$$

coefficients arbitraires réels que nous appellerons les coefficients C.

Cela posé, nous pouvons dans les équations (3) séparer les parties réelles et imaginaires, ce qui nous donne:

$$X = \varphi_1, \quad Y = \varphi_2, \quad X' = \varphi_3, \quad Y' = \varphi_4, \tag{4}$$

les φ étant des fonctions développées suivant les puissances de x, y, x', y'.

Si dans les équations (4) on remplace x, y, x', y' par leurs valeurs (2), on aura X, Y, X', Y' en fonctions de u, v, w, sous la forme:

$$X = \theta_1(u, v, w), \quad Y = \theta_2(u, v, w), \quad X' = \theta_3(u, v, w), \quad Y' = \theta_4(u, v, w) \tag{5}$$

et ce seront les équations de la surface S'.

Pour exprimer que S et S' ont un contact du n^e ordre, substituons dans F, à la place de X, Y, X', Y' leurs valeurs (5); nous aurons F développé suivant les puissances de u, v, w: c'est ce que nous appellerons le développement (6). La condition à exprimer c'est que tous les termes de ce développement, jusqu'au n^e ordre inclusivement, sont nuls. Comme les termes de degré zéro sont nuls d'eux mêmes, cela fait N' coefficients qui doivent s'annuler. Et ces coefficients sont égaux à des polynômes entiers par rapport aux A, aux B et aux C et d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport aux A.

Nous avons donc N' équations à satisfaire. Si nous considérons les A et les B (c'est-à-dire les deux surfaces s et S) comme donnés et les C (c'est-à-dire la transformation) comme inconnus, nous avons N'' inconnues. Pour $n < 9$, nous avons:

$$N'' > N',$$

c'est-à-dire plus d'inconnues que d'équations. Pour $n \geqq 9$ nous avons

$$N'' < N',$$

c'est-à-dire plus d'équations que d'inconnues.

Le problème serait donc toujours possible pour $n < 9$ et généralement impossible pour $n \geqq 9$; mais il convient d'examiner la chose de plus près. Supposons que l'on élimine les C entre les N' relations, combien restera-t-il de relations distinctes entre les A et les B? Pour nous en rendre compte nous allons procéder par différentiation. Supposons que l'on ait écrit les équations (1) et (2) sous la forme particulière où les A et les B se réduisent aux A' et aux B'; ce qui, comme nous l'avons vu, ne restreint pas la généralité. Nos relations seront satisfaites quand les deux surfaces s et S seront identiques et que la transformation se réduira à la transformation identique; c'est-à-dire quand chaque A' sera égal au B' correspondant, quand chaque C se réduira à la valeur C_0 (C_0 étant égal suivant les cas à 0 ou à 1) qui correspond à la substitution identique. Donnons ensuite aux A' et aux C des accroissements infiniment petits, de telle sorte que l'on ait:

$$A'_i = B'_i + \delta A'_i, \qquad C = C_0 + \delta C.$$

En différentiant nos N' équations nous obtiendrons N' relations linéaires entre les N' différentielles $\delta A'$ et les N'' différentielles C. Ces relations sont toutes distinctes, et en effet chacune d'elles ne contiendra que l'une des différentielles $\delta A'$, et cela avec le coefficient 1. Par exemple, celle d'entre elles que l'on obtiendra en égalant à 0 le coefficient de $u^2 v w$ du développement (6) ne contiendra que le $\delta A'$ du coefficient de $Y^2 X' Y'$ dans le développement (1).

Éliminons maintenant l'un des δC, que nous appellerons δC_1. Cette différentielle figurera dans l'une au moins de nos relations, sans quoi on pourrait satisfaire à nos relations en annulant tous les $\delta A'$ et sans annuler tous les δC; supposons donc que δC_1 figure dans la relation qui contient $\delta A'_1$; alors en retranchant cette relation de chacune des autres après l'avoir multipliée par un coefficient convenable, on éliminera δC_1 et il restera $N' - 1$ équations linéaires; elles seront toutes distinctes, car chacun des $\delta A'$ autres que $\delta A'_1$ figurera dans une de ces équations et dans une seule.

En y faisant $\delta A'_1 = 0$, nous aurons des équations de même forme sur lesquelles nous pourrons opérer comme sur les précédentes, en éliminant δC_2 et réduisant d'une unité le nombre des relations, à moins que l'on ne puisse y satisfaire en annulant tous les $\delta A'$, sans annuler tous les δC, et ainsi de suite.

On voit ainsi que le nombre cherché des relations distinctes est égal à

$$N' - N'' + P,$$

P étant le nombre de manières de satisfaire aux équations données en annulant tous les $\delta A'$ sans annuler tous les δC.

Or toute solution de ces équations, où $\delta A' = 0$, et où par conséquent la surface S ne change pas, correspond à une transformation infinitésimale qui change S en elle-même, ou tout au moins en une surface présentant avec S un contact d'ordre n au point M.

Donc P n'est autre chose que l'ordre de ce groupe. Il ne faudrait pas croire que P est l'ordre du groupe G défini plus haut. En effet nous ne devons prendre parmi les substitutions du groupe que celles qui conservent le point M, ce qui réduit déjà l'ordre de 3 unités. D'autre part, supposons par exemple que le point M soit l'origine, et que nous considérions un polynôme du n^e ordre en x, y, x', y', s'annulant à l'origine (c'est-à-dire en M); ce polynôme sera transformé en une série ordonnée suivant les puissances de x, y, x', y', et s'annulant à l'origine; *si dans cette série les termes d'ordre n et d'ordre plus petit sont identiques au polynôme primitif,* la transformation correspondante sera une de celles que LIE appelle dans son Chapitre 28 une *transformation d'ordre* $n + 1$. Au point de vue qui nous occupe, elle correspondra à des δC nuls et devra être regardée comme une transformation identique. De ce fait encore l'ordre se trouve réduit. Ainsi P n'est pas égal à l'ordre r de G, mais c'est l'ordre du groupe formé par celles des transformations de G qui conservent l'origine M et qui sont au plus de l'ordre n au sens de LIE. On voit que pour n très grand, P se réduit à $r - 3$.

Quoi qu'il en soit, le nombre de nos relations distinctes eutre les A' et les B' est

$$N' - N'' + P.$$

Ces relations expriment que les deux surfaces S et s peuvent être transformées de façon à être amenées à avoir un contact d'ordre n. Si s est donnée, il faut que les coefficients de S satisfassent à $N'-N''+P$ conditions, c'est-à-dire que $N'-N''+P$ fonctions de ces coefficients, *que nous appellerons les invariants du n^e ordre de notre surface S,* aient des valeurs convenables; je n'insiste pas sur les détails de la démonstration qui devrait être conduite comme dans tous les cas analogues.

Nous arrivons donc à la règle suivante qui nous fait voir l'importance de ces invariants: *pour que deux surfaces s et S puissent être transformées l'une de l'autre, il faut qu'aux points correspondants tous les invariants de tous les ordres des deux surfaces aient même valeur.*

§ 5. Étude de quelques cas simples.

Supposons d'abord que le groupe G se réduise à la substitution identique, c'est-à-dire que s et S ne soient inaltérées par aucune transformation; nous savons que si le problème local admet une solution, il n'en admet qu'une. Considérons un système quelconque d'invariants, 3 au moins; soit m_1 un point de s. Pour savoir quel est le point M_1 de S qui peut correspondre à m_1, il faut chercher quel est le point de S qui a mêmes invariants que m_1. Le point M_1 est déterminé par cette condition; de sorte que nous savons quel est le point de S qui *peut* correspondre à chacun des points de s; il reste à vérifier si la correspondance ainsi définie entre les points des deux surfaces, définit une transformation de la forme cherchée.

Supposons maintenant que le groupe G soit d'ordre 1; les points de S qui ont mêmes invariants que m_1 sont alors en nombre infini, ils forment une ligne sur S; si d'ailleurs la transformation de s en S est possible, elle l'est d'une infinité de manières, de sorte que n'importe quel point M_1 de la ligne L peut correspondre à m_1. Considerant donc un point m_1 quelconque de s, et la ligne L correspondante de S, nous choisirons *arbitrairement* sur cette ligne le point M_1 qui doit correspondre à m_1; la transformation, si elle existe, sera alors entièrement déterminée; comment verrons-nous alors quel est le point M_2 qui doit correspondre à un autre point m_2 de s? Supposons d'abord que les points m_1 et m_2 soient infiniment voisins; il doit en être de même pour M_1 et M_2. Si les points m_1 et M_1 sont donnés, la transformation, si elle existe, est entièrement déterminée, on peut développer $Z - Z_1$ et $Z' - Z'_1$ suivant les puissances de $z - z_1$ et $z' - z'_1$ (en supposant que l'on a $Z = Z_1$, $Z' = Z'_1$ au point M_1 et $z = z_1$, $z' = z'_1$ au point m_1) et il est facile de calculer les premiers coefficients du développement en fonctions des coordonnées des points m_1 et M_1. Connaissant ces premiers coefficients nous saurons comment la grandeur et la direction du vecteur infiniment petit $M_1 M_2$ dépend de celles du vecteur $m_1 m_2$; le point m_2 étant donné, nous en déduirons donc le point M_2.

Si maintenant m_1 et m_2 ne sont pas infiniment voisins, joignons m_1 à m_2 par une ligne quelconque située sur s; il s'agit de déterminer la ligne correspondante sur S. Pour cela considérons un segment $m m'$ de la ligne $m_1 m_2$ et le segment correspondant MM' de la ligne $M_1 M_2$. Soient x, y, x', y' les coordonnées de m; X, Y, X', Y' celles de M; soient $x + dx$, $y + dy$, $x' + dx'$, $y' + dy'$ celles de m'; $X + dX$, $Y + dY$, $X' + dX'$, $Y' + dY'$ celles de M'. D'après ce qui précède, nous avons une relation entre

$$x,\ y,\quad x',\ y',\quad X,\ Y,\quad X',\ Y'$$
$$dx,\ dy,\quad dx',\ dy',\quad dX,\ dY,\quad dX',\ dY'$$

et si la ligne $m_1 m_2$ est donnée de façon que x, y, x', y', dx, dy, dx', dy' puissent être regardées comme des fonctions connues d'un paramètre unique t et de sa différentielle dt, cette relation nous fournira une équation differentielle entre

$$t,\quad X,\ Y,\quad X',\ Y',\quad \frac{dX}{dt},\quad \frac{dY}{dt},\quad \frac{dX'}{dt},\quad \frac{dY'}{dt},$$

qui déterminera les fonctions inconnues X, Y, X', Y' en fonctions de t et par conséquent la ligne $M_1 M_2$.

On opérerait d'après les mêmes principes si le groupe G était d'ordre plus grand que 1. Nous examinerons plus loin avec plus de détails le cas du groupe (4) du § 3.

Quelques mots encore au sujet de l'exemple cité plus haut, et où le groupe G est d'ordre infini. Supposons que la surface S se réduise au plan

$$X = 0.$$

A quelles conditions doit satisfaire la surface s pour que le problème local puisse être résolu? En tous les points de s, on a $X = 0$.

Soit $F(x, y, x', y') = 0$ l'équation de la surface s; on aura, en différentiant, cette équation:

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dx'}dx' + \frac{dF}{dy'}dy' = 0. \tag{1}$$

Mais comme cette équation de la surface s peut également s'ecrire $X = 0$, nous aurons :

$$\frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy + \frac{dX}{dx'}dx' + \frac{dX}{dy'}dy' = 0.$$

Les quatre dérivées de X sont donc proportionnelles aux quatre dérivées de F, non pour tous les points de l'espace, mais pour tous les points de s.

Cela posé, considérons les équations

$$X = 0, \quad Y = Y_0 \qquad Y_0 \text{ étant une constante.}$$

Elles définiront une surface à deux dimensions que j'appellerai $\sigma(Y_0)$ et qui sera tout entière sur s; je me propose de former l'équation différentielle de ces surfaces $\sigma(Y_0)$. Nous aurons:

$$\frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy + \frac{dY}{dx'}dx' + \frac{dY}{dy'}dy' = 0,$$

ou bien :

$$\frac{dX}{dy}dx - \frac{dX}{dx}dy + \frac{dX}{dy'}dx' - \frac{dX}{dx'}dy' = 0,$$

ou sur s :

$$\frac{dF}{dy}dx - \frac{dF}{dx}dy + \frac{dF}{dy'}dx' - \frac{dF}{dx'}dy' = 0. \tag{2}$$

Nous avons ainsi trois équations entre x, y, x', y' et leurs différentielles. Ce sont les deux équations différentielles (1) et (2) et l'équation $F = 0$. Entre ces trois équations éliminons y' et dy', il restera une équation différentielle :

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \xi' dx' = 0, \tag{3}$$

où ξ, η, ξ' sont des fonctions connues de x, y, x'.

L'équation (3) doit satisfaire à une condition d'intégrabilité, facile à former. Si cette condition n'est pas satisfaite, le problème local ne peut pas être résolu. Si au contraire elle est satisfaite, je dis qu'on aura une solution de ce problème. En effet, dès que l'équation (3) sera intégrée, on aura la valeur de X et celle de Y en tous les points de la surface s. Donnons à x' et à y' des valeurs quelconques x'_0 et y'_0; nous aurons alors la valeur de la fonction

$$Z = X + iY$$

en tous les points de la ligne l, intersection de la surface s avec le plan à 2 dimensions

$$x' = x'_0, \quad y' = y'_0.$$

Or quand on connaît une fonction *analytique* d'une variable le long d'une ligne, on la connaît dans tout le plan. Nous connaîtrons donc la fonction Z pour toutes les valeurs de z, quand on aura $z' = x'_0 + iy'_0$, mais comme x'_0 et y'_0 ont des valeurs arbitraires quelconques, nous connaîtrons Z pour toutes les valeurs de z et de z'. Nous savons que Z est fonction analytique de z, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dZ}{dz_0} = 0,$$

en supposant Z exprimé en fonction de $z = x + iy$, de $z_0 = x - iy$, de z' et de z'_0.

Cette équation a lieu en tous les points de l'espace, et nous en déduisons:

$$\frac{d^2 Z}{d z_0 \, d z_0'} = 0,$$

ce qui nous apprend que $\frac{dZ}{dz_0'}$ est fonction analytique de z. Il reste à montrer que Z est fonction analytique de z', ce qui s'exprimerait par la relation

$$\frac{dZ}{dz_0'} = 0.$$

La fonction $X + iY$ étant définie par l'équation (3), nous aurons, *non pas dans tout l'espace, mais en tous les points de s:*

$$\frac{dX}{dx} = A\frac{dF}{dx}; \quad \frac{dY}{dx} = B\frac{dF}{dx} + C\frac{dF}{dy},$$
$$\frac{dX}{dy} = A\frac{dF}{dy}; \quad \frac{dY}{dy} = B\frac{dF}{dy} - C\frac{dF}{dx},$$
$$\frac{dX}{dx'} = A\frac{dF}{dx'}; \quad \frac{dY}{dx'} = B\frac{dF}{dx'} + C\frac{dF}{dy'},$$
$$\frac{dX}{dy'} = A\frac{dF}{dy'}; \quad \frac{dY}{dy'} = B\frac{dF}{dy'} - C\frac{dF}{dx'},$$

A, B, C étant des fonctions indéterminées.

Mais l'equation $\frac{dZ}{dz_0} = 0$ équivaut à

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \quad \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx},$$

ou

$$(A + C)\frac{dF}{dx} - B\frac{dF}{dy} = 0,$$
$$B\frac{dF}{dx} + (A + C)\frac{dF}{dy} = 0;$$

d'où

$$(A + C)^2 + B^2 = 0,$$

ou, puisque A, B et C sont essentiellement réels:

$$A + C = B = 0,$$

d'où

$$\frac{dX}{dx'} = \frac{dY}{dy'}, \quad \frac{dX}{dy'} = -\frac{dY}{dx'},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{dZ}{dz'} = 0,$$

équation qui est ainsi satisfaite en tous les points de s. Or nous avons vu que $\frac{dZ}{dz'}$ est une fonction analytique de z, et cette fonction étant nulle en tous les points de s

devra être identiquement nulle. De sorte que l'équation $\frac{dZ}{dz'} = 0$ devra être satisfaite dans tout l'espace. C. Q. F. D.

On peut remarquer que l'équation (3) admet une infinité de solutions et que Y peut être remplacé par une fonction arbitraire *réelle* quelconque de Y. Dans ces conditions Z se trouve remplacé par une fonction arbitraire réelle quelconque de Z. Quant à la seconde fonction $Z' = X' + iY'$, elle peut évidemment, dans le cas qui nous occupe, être tout à fait quelconque.

§ 6. Le problème mixte.

Nous allons introduire un problème nouveau que nous appellerons le *problème mixte* parce qu'il tient pour ainsi dire le milieu entre le problème local et le problème étendu.

Supposons que les surfaces s et S ne présentent pas de point singulier.

Supposons que le problème local puisse être résolu dans le voisinage de chacun des points m de la surface s. Si alors

$$\varphi(z, z', z_0, z'_0) = 0$$

est l'équation de la surface s et

$$\Phi(Z, Z', Z_0, Z'_0) = 0$$

celle de la surface S, on peut trouver des fonctions

$$(1) \qquad Z = f(z, z'), \quad Z' = f'(z, z'),$$

analytiques dans le voisinage du point m, et telle que l'on ait identiquement dans le voisinage de ce point m:

$$(2) \quad \Phi[f(z, z'), f'(z, z'), f_0(z_0, z'_0), f'_0(z_0, z'_0)] = \varphi(z, z', z_0, z'_0)\psi(z, z', z_0, z'_0),$$

ψ étant une fonction analytique de z, z', z_0, z'_0 dans le voisinage du point m.

Nous devrons supposer de plus que le déterminant fonctionnel

$$\frac{dZ}{dz}\frac{dZ'}{dz'} - \frac{dZ'}{dz}\frac{dZ}{dz'}$$

ne s'annule pas au point m, sans quoi, en résolvant les équations (1) on ne trouverait pas pour z et z' des fonctions analytiques de Z et de Z'. Il s'ensuit que la fonction ψ, qui est finie et analytique au point m, ne s'annule pas au point m.

Les fonctions f, f', ψ dépendant du point m, nous mettrons ce fait en évidence en posant:

$$f(z, z') = Z(m); \quad f'(z, z') = Z'(m); \quad f_0(z_0, z'_0) = Z_0(m); \quad f'_0(z_0, z'_0) = Z'_0(m)$$

et en écrivant $\psi(m; z, z', z_0, z'_0)$, ou simplement $\psi(m)$, au lieu de $\psi(z, z', z_0, z'_0)$. Nous retenons donc que la fonction $\psi(m)$ est finie, analytique et différente de zéro dans le voisinage de m.

D'autre part il peut se faire que le problème local admette plusieurs solutions ou une infinité de solutions. C'est même seulement dans ce cas que la question dont nous allons nous occuper peut présenter de l'intérêt. S'il en est ainsi, nous désignerons par $Z(m)$, $Z'(m)$, l'une des solutions du problème local au point m et nous choisirons cette solution arbitrairement, mais une fois pour toutes.

Nous devons nous demander maintenant s'il existe des fonctions

$$f(z, z'), \quad f'(z, z')$$

qui restent analytiques en tous les points de s et telles que l'on ait une identité de la forme (1) où la fonction ψ reste analytique, finie, et différente de zéro en tous les points de s. C'est là ce que nous appellerons le *problème mixte*.

Nous supposerons que les deux surfaces s et S sont continues au point de vue analytique, de telle sorte que les fonctions φ et Φ soient analytiques pour toutes les valeurs des variables que nous avons à envisager.

Si le problème local n'admettait qu'une seule solution, c'est-à-dire si la surface s n'admettait aucune transformation en elle-même, le problème mixte doit évidemment être résolu par l'affirmative. Soient en effet $Z(m)$ et $Z'(m)$ les fonctions relatives à un point m de s; soient $Z(m')$, $Z'(m')$ celles qui sont relatives à un autre point m' de s, et qui existent d'après nos hypothèses. Ces fonctions substituées à la place de $f(z, z')$, $f'(z, z')$ satisfont à la condition (1); il doit en être de même, par continuité analytique, des fonctions qui sont la continuation analytique de $Z(m)$, $Z'(m)$. Or si le problème local n'admet qu'une solution, ces deux solutions doivent être identiques, d'où il suit que $Z(m')$, $Z'(m')$ ne peuvent être autre chose que la continuation analytique de $Z(m)$, $Z'(m)$.

Comme nous supposons que le problème local admet une solution en tous les points de s, nous savons que les fonctions $Z(m')$, $Z'(m')$ sont analytiques et ne présentent aucune singularité dans le voisinage du point m'. Donc on peut poursuivre la continuation analytique de $Z(m)$, $Z'(m)$ sur toute la surface s sans rencontrer aucune singularité. Ces fonctions avec leur continuation analytique nous donnent donc la solution du problème mixte.

Mais il n'en est plus de même si la surface s admet des transformations en elle-même, la solution du problème n'étant plus unique; nous savons bien que $Z(m')$, $Z'(m')$ n'ont pas de singularité près de m', nous savons bien que l'on peut poursuivre par continuation analytique les fonctions $Z(m)$, $Z'(m)$; mais nous ne savons plus si $Z(m')$, $Z'(m')$ sont les continuations analytiques de $Z(m)$, $Z'(m)$. La question est donc de savoir si ces continuations analytiques de $Z(m)$, $Z'(m)$ (nous dirons simplement désormais si « les fonctions $Z(m)$ et $Z'(m)$ ») peuvent présenter des singularités sur la surface s.

Il s'agit de savoir quelles peuvent être ces singularités. A cet effet, nous remarquerons que si nous posons:

$$Z(m) = F[Z(m'), Z'(m')], \quad Z'(m) = F'[Z(m'), Z'(m')],$$

la substitution:

$$\big[Z, Z', Z_0, Z_0; F[Z, Z'], F'[Z, Z'], F_0[Z'_0, Z'_0], F'_0[Z_0, Z'_0]\big]$$

sera une substitution du groupe fondamental G relatif à la surface S. D'ailleurs, si $Z(m)$, $Z'(m)$, considérées comme fonctions de z et de z', présentent une singularité dans le voisinage du point m'; comme d'autre part dans le voisinage de ce point $Z(m')$, $Z'(m')$ sont des fonctions analytiques régulières de z et de z' et que réciproquement z et z' sont des fonctions analytiques régulières de $Z(m')$, $Z'(m')$, il faudra bien que les fonctions

$$F(Z, Z'), \quad F'(Z, Z')$$

[c'est-à-dire $Z(m)$, $Z'(m)$ considérées comme fonctions de $Z(m')$, $Z'(m')$] présentent une singularité. Nous sommes donc encore ramenés à l'étude du groupe fondamental G de la surface S.

Nous pouvons déjà tirer de là la conclusion suivante. Supposons que pour aucune des substitutions du groupe G, les fonctions

$$F(Z, Z'), \quad F'(Z, Z')$$

ne présentent aucune singularité en aucun point de la surface S. C'est ce qui arrivera dans un très grand nombre de cas et qui sont précisément les plus importants. Nous verrons en particulier que c'est ce qui arrive si la surface S est une hypersphère. C'est là ce que nous appellerons la condition A.

Il arrivera alors que les fonctions $Z(m)$, $Z'(m)$ peuvent être prolongées analytiquement sur toute la surface s sans présenter aucune singularité en aucun point de cette surface. Il reste à montrer que ces fonctions sont uniformes. C'est ce qui arrivera *si nous supposons de plus que la surface s est simplement connexe;* dans ce cas en effet si la fonction $Z(m)$ n'était pas uniforme, deux de ses déterminations ne pourraient s'échanger qu'en tournant autour d'un point singulier et nous avons vu qu'il n'y en avait pas.

Donc, pour les surfaces simplement connexes qui satisferont à la condition A, toutes les fois que le problème local pourra être résolu en chaque point de la surface, le problème mixte admettra une solution.

Je n'ai pas l'intention de pousser jusqu'au bout la discussion de la condition A. Je me bornerai à quelques remarques:

1° Je suppose que les fonctions $Z(m)$, $Z'(m)$ puissent être définies de façon à être des fonctions continues du point m. En d'autres termes nous savons que le problème local admet une solution autour de chaque point de s; et je suppose de plus que les deux solutions de ce problème qui correspondent à deux points infiniment voisins soient infiniment peu différentes l'une de l'autre. Soit encore:

$$Z(m) = F[Z(m'), Z'(m')], \quad Z'(m) = F'[Z(m'), Z'(m')].$$

Nous avons vu que la substitution définie par les deux fonctions F et F' appartient au groupe G de S; mais nous devons distinguer dans ce groupe les transformations infinitésimales et leurs combinaisons qui forment un groupe *continu* G_0 faisant partie de G.

Je dis qu'avec notre nouvelle hypothèse, la substitution F, F' fait partie non-seulement de G, mais de G_0. Et en effet cette substitution peut être désignée par (m, m') puisqu'elle dépend, d'après sa définition, des deux points m et m'.

Joignons m et m' par un arc de courbe quelconque situé sur s et décomposons cet arc en une infinité d'arcs infiniment petits

$$m m_1, \ m_1 m_2, \ \ldots, \ m_{n-1} m_n, \ m_n m'.$$

Alors la substitution (m, m') pourra être regardée comme la combinaison des substitutions:

$$(m, m_1), (m_1, m_2), \ldots, (m_{n-1}, m_n), (m_n, m'),$$

qui sont infinitésimales. Elle appartient donc à G_0. Il suffit donc alors que la condition A soit remplie par toutes les transformations de G_0.

2° Je suppose que la condition A soit remplie par toutes les transformations *infinitésimales* de G, je dis qu'elle le sera encore pour toutes les transformations *finies* de G_0. Et en effet si elle l'est pour deux transformations, elle le sera également par leurs produits. Le théorème de CAUCHY sur l'intégrabilité des équations différentielles permet de compléter aisément la démonstration.

3° Il est aisé de voir que les substitutions de G ne peuvent jamais présenter certains genres de singularité; par exemple elles n'auront jamais de pôle si la surface S est tout entière à distance finie; car, le point

$$Z(m), \quad Z'(m), \quad Z_0(m), \quad Z'_0(m)$$

devant se trouver sur la surface S, ses coordonnées ne pourront devenir infinies.

4° Elles ne pourront pas non plus, au moins dans des cas très étendus, présenter de points de ramification algébrique, mais ceci exige plus d'attention. Pour pouvoir l'exposer plus facilement, je vais changer pour un instant de notation et écrire: x_1 et y_1 au lieu de $Z(m')$, $Z'(m')$; et x et y au lieu de $Z(m)$, $Z'(m)$. Alors on aura:

$$x = F(x_1, y_1), \quad y = F'(x_1, y_1),$$

d'où l'on tirera

$$x_1 = \theta(x, y), \quad y_1 = \theta'(x, y);$$

et pour l'équation de la surface S:

$$\Phi(x, y, x_0, y_0) = 0.$$

Je poserai ensuite:

$$x_2 = \theta(x_1, y_1), \quad y_2 = \theta'(x_1, y_1)$$
$$x_3 = \theta(x_2, y_2), \quad y_3 = \theta'(x_2, y_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi_n = \Phi(x_n, y_n, x_n^0, y_n^0),$$

x_n^0 et y_n^0 étant les imaginaires conjuguées de x_n et y_n. On aura alors l'identité

$$\Phi_1 = \Phi\psi(x, y, x_0, y_0),$$

ψ étant une fonction régulière et différente de zéro au point considéré.

Soient a, b les valeurs de $Z(m)$, $Z'(m)$ qui correspondent au point m' de la surface s; soient a_1, b_1 les valeurs de $Z(m')$, $Z'(m')$ qui correspondent à ce même point m'.

Ce que nous appelons le « point considéré » c'est le point $x = a$, $y = b$, $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$.

Dans des cas très étendus, le groupe G relatif à la surface S comprendra une substitution:

$$T = (Z, Z', Z_0, Z'_0; Z_1, Z'_1, Z_1^0, Z_1'^0),$$

qui, changeant la surface S en elle-même, changera le point $Z = a$, $Z' = b$, en $Z_1 = a_1$, $Z'_1 = b_1$; et de telle façon que dans le voisinage de $Z = a$, $Z' = b$, les fonctions Z_1, Z'_1 soient analytiques en Z et Z' et, réciproquement, que dans le voisinage de $Z_1 = a_1$, $Z'_1 = b_1$, les fonctions Z, Z' soient analytiques en Z_1 et Z'_1. Si cette condition est remplie nous pourrons toujours supposer que

$$a = a_1, \quad b = b_1.$$

Si en effet il n'en était pas ainsi, nous pourrions appliquer à $Z(m')$, $Z'(m')$ la substitution inverse de T et nous obtiendrons de nouvelles fonctions $Y(m')$ $Y'(m')$, telles que l'on ait:

$$Y(m') = a, \qquad Y'(m') = b$$

pour

$$Z(m') = a_1, \qquad Z'(m') = b_1,$$

c'est-à-dire pour

$$Z(m) = a, \qquad Z'(m) = b,$$

tandis que $Z(m)$, $Z'(m)$, considérées comme fonctions de $Y(m')$, $Y'(m')$, présenteraient un point de ramification.

Nous pourrons alors, sans restreindre la généralité, supposer:

$$a = b = a_1 = b_1 = 0.$$

S'il en est ainsi, les fonctions $F(x_1, y_1)$, $F'(x_1, y_1)$ s'annulent et présentent un point de ramification pour $x_1 = y_1 = 0$. Si nous envisageons les fonctions inverses:

$$x_1 = \theta(x, y), \quad y_1 = \theta'(x, y),$$

ces fonctions seront développables suivant les puissances de x et de y. Pour $x = y = 0$ elles s'annuleront *ainsi que le déterminant fonctionnel:*

$$\Delta = \frac{dx_1}{dx}\frac{dy_1}{dy} - \frac{dx_1}{dy}\frac{dy_1}{dx} = \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)}.$$

Cela posé, nous aurons successivement:

$$\Phi_1 = \Phi\psi, \quad \Phi_2 = \Phi_1\psi_1, \ldots, \Phi_{n+1} = \Phi_n\psi_n,$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\psi_n = \psi(x_n, y_n, x_n^0, y_n^0).$$

Cela nous permet d'écrire:

$$\Phi_n = \Phi H_n,$$

où

$$H_1 = \psi, \quad H_2 = \psi\psi_1, \ldots, H_n = \psi\psi_1 \ldots \psi_{n-1}.$$

La fonction ψ ne s'annulant pas à l'origine par hypothèse, il en est de même de ψ_n et par conséquent de H_n.

Soit:

$$\Delta_n = \frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x_{n-1}, y_{n-1})} \cdots \frac{\partial(x_2, y_2)}{\partial(x_1, y_1)} \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)}.$$

Il est clair que Δ_n présente un zéro d'ordre n pour $x = y = 0$.

Nous pouvons toujours supposer

$$x_1 = \alpha x + \eta_2, \quad y = \eta_2',$$

η_2 et η_2' étant des séries développées suivant les puissances de x et de y et commençant par des termes du 2[d] degré. Car on peut toujours ramener les fonctions θ et θ' à cette forme par un changement linéaire de variables. Mais nous allons faire d'abord une hypothèse de plus; nous allons supposer que x_1 et par conséquent x_n est fonction seulement de x. On a alors:

$$\Delta_n = \frac{dx_n}{dx} \frac{dy_n}{dy};$$

et comme pour $x = y = 0$ on a $\frac{dx_n}{dx} = \alpha^n$, on voit que $\frac{dy_n}{dy}$ doit présenter un zéro d'ordre n. Il vient alors en différentiant $\Phi_n = \Phi H_n$:

$$\frac{d\Phi_n}{dy_n} \frac{dy_n}{dy} = H_n \frac{d\Phi}{dy} + \Phi \frac{dH_n}{dy}.$$

Le 1[er] membre présente un zéro d'ordre n, et H_n ne s'annule pas. Il faut donc que l'équation $\Phi = 0$, entraine $\frac{d\Phi}{dy} = 0$ aux quantités près d'ordre n en x, y, x_0, y_0; c'est-à-dire que les deux surfaces

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0$$

présentent un contact d'ordre n. Comme on peut prendre l'entier n ainsi grand que l'on veut, on doit conclure que l'équation $\Phi = 0$ entraine $\frac{d\Phi}{dy} = 0$. Pour la même raison, elle doit entraîner $\frac{d\Phi}{dy_0} = 0$.

Mais cela n'est possible que si l'on a:

$$\Phi = f(x, x_0) f_1(x, y, x_0, y_0),$$

f_1 ne s'annulant pas pour $x = y = x_0 = y_0 = 0$; c'est-à-dire si l'équation de la surface S se réduit à

$$f(x, x_0) = 0.$$

C'est là une forme d'équation très particulière et admettant un groupe G continu d'ordre infini.

Seulement nous avons fait au début une hypothèse très particulière, à savoir que x_1 est fonction de x seulement et il reste à faire voir que l'on peut toujours, par un changement de variables convenable, ramener au cas où cette hypothèse est vérifiée.

Je veux montrer qu'il existe une fonction $\xi(x, y)$ développable suivant les puissances de x et y, et telle que l'on ait identiquement

$$\xi(x_1, y_1) = F[\xi(x, y)],$$

F étant développable suivant les puissances de ξ. Posons:

$$\xi(x, y) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \cdots,$$
$$F = \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 + \cdots,$$

ξ_n étant homogène de degré n en x et y. Nous aurons d'abord:

$$\xi_1 = x, \quad \beta_1 = \alpha.$$

Nous déterminerons ensuite par approximations successives ξ_2 et β_2, puis ξ_3 et β_3, etc. Pour déterminer ξ_n et β_n nous aurons une identité de la forme:

$$\xi_1(\alpha x, 0) = \alpha \xi_n(x, y) + \beta_n x^n + \text{termes connus}$$

et on pourra déterminer ξ_n et β_n sans difficulté. On pourrait même supposer $\beta_n = 0$ à moins que l'on n'ait:

$$\alpha^{n-1} = 1.$$

Quant à la convergence des séries, on l'établirait par la méthode des fonctions majorantes.

On pourrait alors prendre pour variables nouvelles ξ et y au lieu de x et y et recommencer le raisonnement précédent. On verrait ainsi que l'équation de S doit être de la forme:

$$f[\xi(x, y), \xi_0(x_0, y_0)] = 0.$$

5° Comme les deux surfaces s et S jouent un rôle identique, il est clair qu'au lieu d'envisager le groupe G de la surface S, on aurait pu tout aussi bien envisager le groupe g de la surface s.

§ 7. Transformations de l'hypersphère.

Je suppose que la surface s soit « l'hypersphère »:

$$(1) \qquad z z_0 + z' z'_0 = 1$$

et je me propose de déterminer le groupe G correspondant. J'observe d'abord que cette hypersphère se change en elle-même par les substitutions linéaires:

$$(2) \qquad \left(z, z'; \frac{a z + b z' + c}{a'' z + b'' z' + c''}, \frac{a' z + b' z' + c'}{a'' z + b'' z' + c''}\right),$$

pourvu que les coefficients a, b, ... satisfassent aux conditions:

$$(3) \qquad \begin{cases} a a_0 + a' a'_0 - a'' a''_0 = b b_0 + b' b'_0 - b'' b''_0 = - c c_0 - c' c'_0 + c'' c''_0, \\ a b_0 + a' b'_0 - a'' b''_0 = b c_0 + b' c'_0 - b'' c''_0 = c a_0 + c' a'_0 - c'' a''_0 = 0, \\ a_0 b + a'_0 b' - a''_0 b'' = b_0 c + b'_0 c' - b''_0 c'' = c_0 a + c'_0 a' - c''_0 a'' = 0. \end{cases}$$

Les substitutions (2) forment évidemment un groupe que j'appellerai Γ. C'est un groupe continu d'ordre 8 qui est précisément le groupe (4) du § 3. Les groupes discontinus contenus dans ce groupe Γ sont précisément les groupes hyperfuchsiens découverts par M. PICARD.

Il reste à savoir si Γ est identique à G, ou si Γ est un sous-groupe de G. J'établirai d'abord que G *ne contient pas d'autre substitution infinitésimale que celles de* Γ.

A cet effet, j'aurai avantage à transformer l'équation de l'hypersphère en posant :

$$z = \frac{1+x}{1-x}, \quad z_0 = \frac{1+x_0}{1-x_0}, \quad z' = \frac{y\sqrt{2}}{1-x}, \quad z'_0 = \frac{y_0\sqrt{2}}{1-x_0},$$

d'où :

$$zz_0 + z'z'_0 - 1 = \frac{2(x + x_0 + yy_0)}{(1-x)(1-x_0)}.$$

L'équation de l'hypersphère devient ainsi :

$$x + x_0 + yy_0 = 0. \tag{4}$$

Appliquons à nos variables une transformation infinitésimale en changeant x et y en $x + \xi$ et $y + \eta$. Pour que cette transformation n'altère pas l'hypersphère, il faut que l'on ait l'identité :

$$\xi + \xi_0 + \eta y_0 + \eta_0 y = (x + x_0 + yy_0)\psi, \tag{5}$$

ψ étant une fonction analytique de x, x_0, y, y_0.

Développons ξ, η, ξ_0, η_0, ψ suivant les puissances de y et de y_0 et écrivons :

$$\xi = \sum \xi_{\mu\nu}, \quad \eta = \sum \eta_{\mu\nu}, \quad \xi_0 = \sum \xi^0_{\mu\nu}, \quad \eta_0 = \sum \eta^0_{\mu\nu}, \quad \psi = \sum \psi_{\mu\nu},$$

$\xi_{\mu\nu}, \ldots, \psi_{\mu\nu}$ représentant l'ensemble des termes en $y^\mu y_0^\nu$.

L'identité (5) nous donnera en égalant les termes en $y^\mu y_0^\nu$:

$$\xi_{\mu\nu} + \xi^0_{\mu\nu} + \eta_{\mu.\nu-1} y_0 + \eta^0_{\mu-1.\nu} y = (x + x_0)\psi_{\mu\nu} + yy_0\psi_{\mu-1.\nu-1}. \tag{6}$$

On voit que l'on peut avoir une série d'identités de la forme (6) où figureront seulement des fonctions

$$\xi_{\mu\nu}, \quad \xi^0_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu.\nu-1}, \quad \eta^0_{\mu-1.\nu}, \quad \psi_{\mu.\nu}, \tag{7}$$

pour lesquelles la différence $\mu - \nu$ *sera constante.* Nous pourrons donc considérer séparément les fonctions de la forme (7) correspondant à une différence donnée $\mu - \nu$.

Nous devons observer de plus que dans $\xi_{\mu.\nu}$ l'indice ν doit être nul, car la fonction ξ ne dépend que de x et de y. Inversement, dans $\xi^0_{\mu\nu}$ l'indice μ doit être nul. De même dans $\eta_{\mu.\nu-1}$ on doit avoir $\nu = 1$; dans $\eta^0_{\mu-1.\nu}$ on doit avoir $\mu = 1$. Donc on aura $\xi_{\mu\nu} = 0$ par exemple si ν n'est pas nul.

Faisons d'abord $\mu - \nu = 0$, nous aurons la série d'identités :

$$\xi_{00} + \xi^0_{00} = (x + x_0)\psi_{00}, \quad \eta_{10} y_0 + \eta^0_{01} y = (x + x_0)\psi_{11} + yy_0\psi_{00},$$

$$0 = (x + x_0)\psi_{22} + yy_0\psi_{11} = (x + x_0)\psi_{33} + yy_0\psi_{22} = \ldots = (x + x_0)\psi_{\mu\mu} + y_0\psi_{\mu-1.\mu-1}.$$

On voit que les rapports $\frac{\psi_{11}}{\psi_{22}}, \frac{\psi_{22}}{\psi_{33}}, \ldots, \frac{\psi_{\mu-1.\mu-1}}{\psi_{\mu.\mu}}$ sont divisibles par $x + x_0$.

Donc ψ_{11} sera divisible par $(x + x_0)^{\mu-1}$ et cela quelque grand que soit μ, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$\psi_{11} = 0,$$

d'où :

$$\xi_{00} + \xi^0_{00} = (x + x_0)\psi_{00}, \quad \eta_{10} y_0 + \eta_{01} y = yy_0\psi_{00}$$

ou, en posant $\eta_{10} = \zeta y$, $\eta^0_{01} = \zeta_0 y_0$:

$$\zeta + \zeta_0 = \psi_{00}.$$

Nous aurons d'ailleurs
$$\xi = \xi_{00}, \quad \xi_0 = \xi^0_{00},$$
puisque ξ ne contient pas d'autre terme, et il restera:

$$(8) \qquad \xi + \xi_0 = (x + x_0)(\zeta - \zeta_0),$$

où ξ et ζ dépendent seulement de x; ξ_0 et ζ_0 seulement de x_0.

Cela n'est possible que si
$$\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{d\zeta_0}{dx_0} = \text{const.}$$

Ce qui nous donne les 4 solutions suivantes:

$$(9) \left\{ \begin{array}{ll} 1^\circ & \zeta = ix, \quad \zeta_0 = -ix_0, \quad \xi = ix^2, \quad \xi_0 = -ix_0^2, \quad \eta = ixy, \quad \eta_0 = -ix_0y_0 \\ 2^\circ & \zeta = \zeta_0 = 1, \quad \xi = 2x, \quad \xi_0 = 2x_0, \quad \eta = y, \quad \eta_0 = y_0 \\ 3^\circ & \zeta = i, \quad \zeta_0 = -i, \quad \xi = \xi_0 = 0, \quad \eta = iy, \quad \eta_0 = -iy_0 \\ 4^\circ & \zeta = \zeta_0 = 0, \quad \xi = i, \quad \xi_0 = -i, \quad \eta = \eta_0 = 0. \end{array} \right.$$

Supposons maintenant:
$$\mu = \nu + 1;$$
nous aurons la suite d'identités:

$$\xi_{10} + \eta^0_{00} y = (x + x_0)\psi_{10}, \quad \eta_{20} y_0 = (x + x_0)\psi_{21} + yy_0\psi_{10}$$
$$0 = (x + x_0)\psi_{32} + \psi_{21} = (x + x_0)\psi_{43} + \psi_{32} = \cdots$$

On verrait comme plus haut que $\psi_{21} = 0$, et on en déduirait

$$\xi_{10} = \alpha y, \quad \eta^0_{00} = \beta_0, \quad \eta_{20} = y^2\gamma, \quad \psi_{10} = y\gamma,$$

α et γ dépendant seulement de x, et β_0 de x_0. Il reste alors:

$$\alpha + \beta_0 = (x + x_0)\gamma;$$

ce qui comporte les 4 solutions suivantes:

$$(10) \left\{ \begin{array}{lllllll} \gamma = 1, & \alpha = x, & \beta_0 = x_0, & \xi = xy, & \xi_0 = 0, & \eta = y^2, & \eta_0 = x_0 \\ \gamma = 0, & \alpha = i, & \beta_0 = -i, & \xi = iy, & \xi_0 = 0, & \eta = 0, & \eta_0 = -i \\ \gamma = 0, & \alpha = 1, & \beta_0 = -1, & \xi = y, & \xi_0 = 0, & \eta = 0, & \eta_0 = -1 \\ \gamma = i, & \alpha = ix, & \beta_0 = ix_0, & \xi = ixy, & \xi_0 = 0, & \eta = iy^2, & \eta_0 = ix_0. \end{array} \right.$$

Ces solutions ne conviennent pas, car elles ne donnent pas pour ξ et ξ_0 d'une part, pour η et η_0 d'autre part, des fonctions imaginaires conjuguées. Mais en faisant $\mu = \nu - 1$ on trouve 4 nouvelles solutions:

$$(10^{\text{bis}}) \left\{ \begin{array}{llll} \xi = 0, & \xi_0 = x_0 y_0, & \eta = x, & \eta_0 = y_0^2 \\ \xi = 0, & \xi_0 = -iy_0, & \eta = i, & \eta_0 = 0 \\ \xi = 0, & \xi_0 = y_0, & \eta = -1, & \eta_0 = 0 \\ \xi = 0, & \xi_0 = -ix_0y_0, & \eta = -ix, & \eta_0 = -iy_0^2 \end{array} \right.$$

qui sont imaginaires conjuguées des précédentes. En ajoutant les solutions (10) et

(10^{bis}) on trouve 4 nouvelles solutions:

$$(11)\left\{\begin{array}{lllll} 5^o & \xi = xy, & \xi_0 = x_0 y_0, & \eta = y^2 + x, & \eta_0 = y_0^2 + x_0 \\ 6^o & \xi = iy, & \xi_0 = -iy_0, & \eta = 1, & \eta_0 = -i \\ 7^o & \xi = y, & \xi_0 = y_0, & \eta = -1, & \eta_0 = -1 \\ 8^o & \xi = ixy, & \xi_0 = -ix_0 y_0, & \eta = -ix + iy^2, & \eta_0 = ix_0 - iy_0^2 \end{array}\right.$$

qui conviennent au problème.

Si nous faisons maintenant $\mu = \nu + h$, il vient, en supposant $h > 0$,

$$\xi_{h0} = (x + x_0)\psi_{h0}, \quad \eta_{h+1.0} y_0 = (x + x_0)\psi_{h+1.1} + yy_0 \psi_{hh0}.$$

On verrait comme plus haut que $\psi_{h+1.1}$ est nul et on en déduirait:

$$y\xi_{h0} = (x + x_0)\eta_{h+1.0}.$$

Le 1^er^ membre ne dépendant pas de x_0, il doit en être de même du second; ce qui entraîne

$$\eta_{h+1.0} = \xi_{h0} = 0:$$

il n'y a pas de solution. Si on supposait $h < 0$, on arriverait au même résultat, car on obtiendrait des relations qui seraient imaginaires conjuguées des précédentes. Le problème ne comporte donc pas d'autres solutions que les solutions (9) et (11). Ces solutions sont au nombre de huit, elles ne peuvent donc être autres que les huit transformations infinitésimales du groupe Γ qui est d'ordre 8. C. Q. F. D.

Je mets maintenant de nouveau l'équation de l'hypersphère sous la forme (1) et je me propose de démontrer que le groupe G ne contient pas d'autres transformations *finies* que celles de Γ. Soit en effet

$$T = (z, z'; Z, Z')$$

une pareille transformation. Je ne restreindrai pas la généralité en supposant que pour $z = z' = 0$, on a $Z = Z' = 0$.

Supposons en effet que cette transformation T transforme le point $z = \alpha$, $z' = \alpha'$ dans le point $Z = \beta$, $Z' = \beta'$; je supposerai de plus qu'aucun de ces deux points n'est sur l'hypersphère. Je supposerai encore que le déterminant fonctionnel de la transformation T, c'est-à-dire le déterminant fonctionnel de Z et Z' par rapport à z et z', ne s'annule pas pour $z = \alpha$, $z' = \alpha'$. Cela est permis puisque ce déterminant n'est pas identiquement nul et que le point α, α' est arbitraire.

Parmi les substitutions du groupe Γ, il y en a une qui change l'origine en un point quelconque $z = c$, $z' = c'$, pourvu que ce point ne soit pas sur l'hypersphère; ce qui veut dire que l'on peut choisir les coefficients a, b, ... de la substitution (2) de telle façon que les relations (3) soient satisfaites, que $c'' = 1$ et que c et c' aient des valeurs quelconques, pourvu que ces valeurs ne satisfassent pas à l'égalité

$$cc_0 + c'c'_0 = 1.$$

Soient alors A et B celles des substitutions du groupe Γ qui changent l'origine en le point α, α' pour A, ou en le point β, β' pour B. Alors la substitution

$$ATB^{-1}$$

transformera le point $z = z' = 0$ en lui-même. Elle fera d'ailleurs partie du groupe G puisque A, T et B en font partie; elle pourra donc être substituée à T. D'ailleurs son déterminant fonctionnel ne s'annule pas à l'origine. C. Q. F. D.

Soient G_1 et Γ_1 les sous-groupes formés des substitutions de G et de Γ qui changent l'origine en elle-même. Il est clair que Γ_1 sera un sous-groupe de G_1 et, d'après l'hypothèse que nous venons de justifier, T fait partie de G_1. Quant au groupe Γ_1, il est formé de toutes les substitutions (2) qui sont telles que

$$c = c' = 0,$$

d'où

$$a'' = b'' = 0, \quad c'' = 1.$$

Nous ne restreindrons pas non plus la généralité en supposant que T est tel que l'on ait (pour $z = z' = 0$, c'est-à-dire à l'origine)

$$\frac{dZ}{dz'} = 0.$$

Supposons en effet que l'on ait à l'origine:

$$\frac{dZ}{dz} = A, \quad \frac{dZ}{dz'} = B, \quad \frac{dZ'}{dz} = A', \quad \frac{dZ'}{dz'} = B'.$$

Nous pourrons combiner la substitution T avec une substitution du groupe Γ_1, et nous obtiendrons ainsi une substitution T_1 appartenant comme T au groupe G_1 et qui changera z et z' en

$$Z_1 = aZ + bZ',$$
$$Z'_1 = a'Z + b'Z'.$$

Les coefficients a, b, a', b' sont assujettis aux conditions:

$$(12) \qquad \begin{cases} aa_0 + a'a'_0 = bb_0 + b'b'_0 = 1, \\ ab_0 + a'b'_0 = a_0 b + a'_0 b' = 0, \end{cases}$$

qui ne sont autre chose que les conditions (3); il faut choisir a, b de façon que ces conditions (3) soient remplies et que l'on ait:

$$aA + bA' = 0.$$

Cela est toujours possible. La substitution T_1 satisfait d'ailleurs à la condition imposée $\dfrac{dZ_1}{dz'} = 0$. C. Q. F. D.

Ajoutons que le déterminant fonctionnel de Z_1 et Z'_1 par rapport à z et à z' ne s'annule pas à l'origine, puisque celui de T ne s'annule pas.

Soient G_2 et Γ_2 les sous-groupes formés des substitutions de G_1 et Γ_1 qui satisfont à l'origine à la condition

$$\frac{dZ}{dz'} = 0.$$

Il est clair que Γ_2 sera un sous-groupe de G_2 et, d'après l'hypothèse que nous venons de justifier, T fait partie de G_2. Quant à Γ_2, il est formé de toutes les substitutions de Γ_1 pour lesquelles on a :

$$b = b_0 = 0,$$

d'où, d'après les conditions (12),

$$a' = a'_0 = 0.$$

Il se compose donc des substitutions qui changent z et z' en

$$az, \quad b'z',$$

où

$$aa_0 = b'b'_0 = 1.$$

Ainsi T fait partie de G, de G_1 et de G_2. D'ailleurs : Γ est le plus grand groupe continu contenu dans G; Γ_1 est le plus grand groupe continu contenu dans G_1; Γ_2 est le plus grand groupe continu contenu dans G_2. Comme T fait partie de G, il change tout groupe continu contenu dans G en un groupe continu contenu dans G; donc tout sous-groupe de Γ en un sous-groupe de Γ; donc Γ en lui-même. De même T change Γ_1 en lui-même et Γ_2 en lui-même.

Si donc on a

$$Z = f(z, z'), \quad Z' = f'(z, z'),$$

on devra avoir identiquement

$$f(az, b'z') = Af(z, z'), \quad f'(az, b'z') = B'f'(z, z'),$$

A et B' étant des constantes de module 1, si a et b' sont des constantes quelconques de module 1. Cela n'est possible que si l'on a :

$$Z = \lambda z^n, \quad Z' = \lambda' z'^p.$$

Il est aisé de vérifier que l'équation de l'hypersphère ne pourra rester inaltérée que si les constantes n et p se réduisent à l'unité, c'est-à-dire si T fait partie de Γ_2.

Donc il n'existe pas d'autre substitution qui n'altère pas l'hypersphère que celles du groupe Γ. *Les deux groupes* G et Γ *sont identiques.* C. Q. F. D.

Nous allons maintenant vérifier que les fonctions

$$Z = \frac{az + bz' + c}{a''z + b''z' + c''}, \quad Z' = \frac{a'z + b'z' + c'}{a''z + a''z' + c''}$$

ne présentent aucune singularité en dehors de l'hypersphère.

La seule singularité possible serait obtenue pour

$$(14) \qquad a''z + b''z' + c'' = 0.$$

Mais en vertu des relations (3) l'équation de l'hypersphère peut s'écrire :

$$(15) \quad \begin{cases} (az + bz' + c)(a_0 z_0 + b_0 z'_0 + c_0) + (a'z + b'z' + c')(a'_0 z_0 + b'_0 z'_0 + c'_0) \\ \qquad = (a''z + b''z' + c'')(a''_0 z_0 + b''_0 z'_0 + c''_0). \end{cases}$$

Si l'équation (14) était satisfaite, le second membre de (15) devrait s'annuler, ce qui est impossible, car le 1[er] membre est essentiellement positif.

Comme d'ailleurs l'hypersphère est simplement connexe, les conditions du § précédent sont remplies; c'est-à-dire que si l'une des deux surfaces s et S est une hypersphère et si le problème local peut être résolu dans le voisinage de chaque point, le problème mixte comportera une solution.

§ 8. Le problème étendu.

Reprenons notre surface s limitant un domaine d et notre surface S limitant un domaine D. Nous supposons le problème mixte résolu; nous connaissons donc des fonctions Z et Z', analytiques en tous les points z, z' de la surface s et transformant s en S. Pouvons-nous en déduire la solution du problème étendu, c'est-à-dire pouvons-nous trouver des fonctions, analytiques, non-seulement en tous les points de la surface s, mais en tous les points du domaine d limité par cette surface et transformant s en S et d en D? Les fonctions Z et Z', qui nous fournissent la solution du problème mixte et qui sont régulières sur la surface s, présentent-elles des singularités à l'intérieur de d?

La réponse nous est fournie par un théorème de M. HARTOGS *).

D'après ce théorème, une fonction de deux variables z et z' sera analytique à l'intérieur d'un domaine d à 4 dimensions, pourvu qu'elle le soit sur la surface s à 3 dimensions qui limite ce domaine.

La démonstration pourrait se rattacher à des considérations que j'ai développées à propos d'une question entièrement différente dans le Bulletin Astronomique, tome XVI. Voir aussi mes *Leçons de Mécanique céleste,* tome II. Soit $F(z, z')$ la fonction en question. Par hypothèse, elle est régulière dans un domaine δ comprenant tous les points de s et les points suffisamment voisins; je dis qu'elle est régulière dans tout le domaine d.

Considérons un contour γ dans le plan des z et l'aire β limitée par ce contour. Je dirai qu'un point $z = a$ satisfait à la condition A, s'il existe une valeur a' de z' telle que le point a, a' appartienne à d; je dirai que l'aire β satisfait à la condition A si tous ses points satisfont à la condition A. Je dirai qu'un point $z = a$ satisfait à la condition B, s'il existe des valeurs a' de z' telles que le point a, a' fasse partie de δ. Je dirai que l'aire β satisfait à la condition B, s'il existe des valeurs de z' qui associées à un point quelconque de β donnent un point appartenant au domaine δ.

L'ensemble de ces valeur de z' forment alors dans le plan des z' une certaine aire β', et en associant un point quelconque de β avec un point quelconque de β', on obtiendra un domaine à 4 dimensions $\beta\beta'$ faisant partie de δ. Il est clair qu'un point $z = a$ quelconque satisfait à la condition B s'il satisfait à la condition A. Soit en effet

$$\Phi(z, z_0, z', z'_0) = 0$$

l'équation de s; le domaine d pourra être défini par l'inégalité

$$\Phi > 0$$

et le domaine δ par les inégalités

$$\Phi > -\varepsilon, \quad \Phi < \varepsilon.$$

*) HARTOGS, *Einige Folgerungen aus der* CAUCHY*schen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen* [Sitzungsb. der math.-physik. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, t. XXXVI (1906), pp. 223-242].

Soit $z = a$; nous aurons par hypothèse des valeurs de z' pour lesquelles $\Phi > 0$; d'autre part pour z' très grand on aura $\Phi < 0$, puisque la surface s est fermée, d'où il résulte que le domaine d ne s'étend pas à l'infini. Donc par continuité Φ pourra prendre des valeurs comprises entre $-\varepsilon$ et ε. C. Q. F. D.

On déduira de là que dans le voisinage de tout point $z = a$ satisfaisant à la condition A il y a une aire β satisfaisant à la condition B, et par conséquent que toute aire β satisfaisant à la condition A peut être décomposée en aires plus petites satisfaisant à la condition B.

Je dis maintenant que la fonction F est uniforme dans d. Considérons en effet un contour fermé γ dans le plan des z, soit F_0 la valeur initiale de F quand on part d'un certain point de ce contour, et F_1 la valeur finale quand on en a fait tout le tour. Il faut démontrer que

$$F_1 = F_0.$$

D'abord la différence $F_1 - F_0$ est une fonction de z', susceptible d'être poursuivie par continuation analytique. Supposons d'abord que l'aire β limitée par le contour γ satisfasse à la condition B, alors pour les valeurs de z' appartenant à l'aire β', on aura:

$$F_1 - F_0 = 0,$$

puisque la fonction F est uniforme dans le domaine δ et par conséquent dans le domaine $\beta\beta'$.

Cette différence sera donc encore nulle pour toutes les valeurs de z'.

Si l'aire β ne satisfait pas à la condition B, on la décomposera en aires plus petites satisfaisant à cette condition.

La fonction F est donc uniforme, il reste à montrer qu'elle ne présente pas de singularité, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int (z - a)^p F\, dz,$$

où a est un point quelconque satisfaisant à la condition A, où p est un entier positif quelconque, intégrale prise le long d'un contour fermé quelconque entourant le point a; que cette intégrale, dis-je, est toujours nulle. Or c'est ce que l'on verrait en raisonnant sur cette intégrale comme nous avons raisonné sur la différence $F_1 - F_0$.

Il ne sera pas inutile de donner une démonstration spéciale pour le cas où la surface s est une hypersphère. Soit

$$Z = F(z, z') = X + iY.$$

Sa partie réelle X satisfera aux équations:

$$\frac{d^2 X}{dz\, dz_0} = \frac{d^2 X}{dz'\, dz_0} = \frac{d^2 X}{dz\, dz'_0} = \frac{d^2 X}{dz'\, dz'_0} = 0 \tag{1}$$

et par conséquent à l'équation

$$\frac{d^2 X}{dz\, dz_0} + \frac{d^2 X}{dz'\, dz'_0} = 0. \tag{2}$$

Si alors nous faisons

$$z = x + iy, \quad z_0 = x - iy,$$
$$z' = x' + iy', \quad z'_0 = x' - iy',$$

l'équation (2) pourra s'écrire:

$$\Delta X = \frac{d^2 X}{d x^2} + \frac{d^2 X}{d y^2} + \frac{d^2 X}{d x'^2} + \frac{d^2 X}{d y'^2} = 0. \tag{3}$$

C'est l'équation de LAPLACE; la fonction X étant par hypothèse régulière dans le domaine δ, c'est-à-dire pour les points voisins de l'hypersphère

$$z z_0 + z' z'_0 = 1,$$

pourra s'exprimer à l'aide des fonctions sphériques, ou plutôt de leur généralisation pour 4 dimensions; nous pourrons donc écrire:

$$X = \sum P_n + \sum Q_n (z z_0 + z' z'_0)^{-1-n}, \tag{4}$$

P_n et Q_n étant des polynômes homogènes d'ordre n en x, y, x', y' satisfaisant à l'équation (3); ou ce qui revient au même en z, z_0, z', z'_0 satisfaisant à l'équation (2). La fonction X ne peut d'ailleurs être développée sous cette forme que d'une seule manière.

Soient alors $D_1 X$, $D_2 X$, $D_3 X$, $D_4 X$ les 4 derivées partielles de X qui s'annulent en vertu des équations (1), il viendra:

$$\sum D P_n + \sum D[Q_n (z z_0 + z' z'_0)^{-1-n}] = 0.$$

Nous remarquerons que $D P_n$ et $D Q_n$ sont des polynômes sphériques d'ordre $n - 2$; c'est-à-dire que l'on a:

$$\Delta(D P_n) = \Delta(D Q_n) = 0.$$

Posons pour abréger

$$-1 - n = k, \quad R = z z_0 + z' z'_0$$

et supprimons l'indice n de Q quand il ne sera pas indispensable. Il viendra:

$$D_1(Q R^k) = R^k D Q + k R^{k-1}\left(z \frac{d Q}{d z} + z_0 \frac{d Q}{d z_0}\right) + k Q R^{k-1} + k(k-1) z z_0 Q R^{k-2},$$

$$D_2(Q R^k) = R^k D Q + k R^{k-1}\left(z \frac{d Q}{d z'} + z'_0 \frac{d Q}{d z_0}\right) + k(k-1) z z'_0 Q R^{k-2},$$

$$D_3(Q R^k) = R^k D Q + k R^{k-1}\left(z' \frac{d Q}{d z} + z_0 \frac{d Q}{d z'_0}\right) + k(k-1) z' z_0 Q R^{k-2},$$

$$D_4(Q R^k) = R^k D Q + k R^{k-1}\left(z' \frac{d Q}{d z'} + z'_0 \frac{d Q}{d z'_0}\right) + k Q R^{k-1} + k(k-1) z' z'_0 Q R^{k-2}.$$

En combinant la 1ère et la 4ème de ces relations et appliquant à Q le théorème des fonctions homogènes, on trouve:

$$\Delta(Q R^k) = R^k \Delta Q + k R^{k-1}(n Q) + 2 k Q R^{k-1} + k(k-1)(z z_0 + z' z'_0) Q R^{k-2},$$

ou, en remarquant que $\Delta Q = 0$, $z z_0 + z' z'_0 = R$:

$$\Delta(Q R^k) = n k R^{k-1} Q + k(k+1) Q R^{k-1},$$

d'où

$$\Delta(QR^k) = 0 \quad \text{puisque} \quad k + 1 = -n.$$

Il est clair que l'on aura :

$$\Delta[D(QR^k)] = 0$$

et que $D(QR^k)$ est homogène d'ordre $-n-4$; on a donc :

$$D_i(Q_n R^k) = H_n^i R^{k-2},$$

H_n^i étant un polynôme sphérique d'ordre $n+2$, dont l'expression est donnée par les formules précédentes. Dans ces conditions, les équations (1) peuvent s'écrire :

$$0 = \sum D_i P_n + \sum H_n^i R^{k-2}$$

et comme une fonction ne peut se développer que d'une seule manière en série de la forme (4), on devra avoir séparément :

$$D_i P_n = 0, \quad H_n^i = 0, \quad D_i(Q_n R^k) = 0.$$

On aura donc :

(5) $$Q_n R^k = Y + Y_0,$$

Y étant fonction de z et z' seulement, Y_0 fonction de z_0 et z'_0 seulement. On en tire :

$$Q_n = (Y + Y_0)(zz_0 + z'z'_0)^{n+1}.$$

$Q_n R^k$ est une fonction rationnelle. Donc il en est de même de Y; il suffit pour s'en assurer de donner à z_0 et z'_0 des valeurs constantes dans l'identité (5). Il en est de même de Y_0. Posons donc :

$$Y = \frac{U}{V}, \quad Y_0 = \frac{U_0}{V_0},$$

U, V, U_0, V_0 étant des polynômes premiers entre eux; il viendra :

(6) $$Q_n V V_0 = (UV_0 + U_0 V)(zz_0 + z'z'_0)^{n+1}.$$

V divise le 1[er] membre, il est premier avec U et avec V_0, donc avec UV_0 et avec $UV_0 + U_0 V$; donc il divisera le facteur $(zz_0 + z'z'_0)^{n+1}$. Or ce facteur n'admet aucun diviseur dépendant seulement de z et z'; il faut donc que l'on ait

$$V = V_0 = 1,$$

ce qui est impossible, puisque Q_n est de degré n, et que le second membre contient un facteur de degré $2n+2$. On a donc :

$$Q_n = 0$$

et par conséquent

$$X = \sum P_n,$$

ce qui montre que X reste régulier dans tout le domaine d intérieur a l'hypersphère.

C. Q. F. D.

On voit la différence avec le cas des fonctions d'une seule variable. Dans ce cas l'équation (4) deviendrait :

$$X = \sum P_n + \sum Q_n (zz_0)^{-n}$$

et l'équation (6) :

$$Q_n V V_0 = (UV_0 + U_0 V)(zz_0)^n;$$

V serait un diviseur de z^n, V_0 un diviseur de z_0^n et il n'y aurait pas de raison pour que Q_n soit nul; on trouverait au contraire:

$$V = z^n, \quad V_0 = z_0^n, \quad U = U_0 = 1, \quad Q_n = z^n + z_0^n,$$

ou bien

$$V = z^n, \quad V_0 = z_0^n, \quad U = i, \quad U_0 = -i, \quad Q_n = i(z^n - z_0^n).$$

§ 9. Le problème sur l'hypersphère.

Supposons que la surface s soit une hypersphère et la surface S une surface infiniment voisine de l'hypersphère. Soit

$$z z_0 + z' z'_0 = 1$$

l'équation de s; soit

$$Z Z_0 + Z' Z'_0 = 1 + \psi$$

celle de S, ψ étant très petit. Nous poserons

$$Z = z + \zeta, \qquad Z' = z' + \zeta',$$
$$Z_0 = z_0 + \zeta_0, \quad Z'_0 = z'_0 + \zeta'_0,$$

ζ etc. étant très petits. Il s'agit de savoir si l'on peut trouver des fonctions

$$\theta, \quad \zeta, \quad \zeta', \quad \zeta_0, \quad \zeta'_0$$

satisfaisant à l'identité

(1) $$z\zeta_0 + z_0\zeta + z'\zeta'_0 + z'_0\zeta' = \psi + (z z_0 + z' z'_0 - 1)\theta = \varphi.$$

Nous avons, pour écrire cette identité, négligé les carrés de ζ. J'ajoute que ζ et ζ' doivent être fonctions seulement de z et de z', et ζ_0 et ζ'_0 de z_0 et z'_0.

En différentiant cette identité, on trouve:

(2) $$\begin{cases} \zeta_0 + z_0\dfrac{d\zeta}{dz} + z'_0\dfrac{d\zeta'}{dz} = \dfrac{d\psi}{dz} + z_0\theta = \dfrac{d\varphi}{dz}, \\ \zeta'_0 + z_0\dfrac{d\zeta}{dz'} + z'_0\dfrac{d\zeta'}{dz'} = \dfrac{d\psi}{dz'} + z'_0\theta = \dfrac{d\varphi}{dz'}, \\ \zeta + z\dfrac{d\zeta_0}{dz_0} + z'\dfrac{d\zeta'_0}{dz_0} = \dfrac{d\psi}{dz_0} + z\,\theta = \dfrac{d\varphi}{dz_0}, \\ \zeta' + z\dfrac{d\zeta_0}{dz'_0} + z'\dfrac{d\zeta'_0}{dz'_0} = \dfrac{d\psi}{dz'_0} + z'\theta = \dfrac{d\varphi}{dz'_0}. \end{cases}$$

En différentiant une fois de plus on trouve:

(3) $$\begin{cases} D_1\varphi = \dfrac{d\zeta}{dz} + \dfrac{d\zeta_0}{dz_0}, \\ D_2\varphi = \dfrac{d\zeta}{dz'} + \dfrac{d\zeta'_0}{dz_0}, \\ D_3\varphi = \dfrac{d\zeta'}{dz} + \dfrac{d\zeta_0}{dz'_0}, \\ D_4\varphi = \dfrac{d\zeta'}{dz'} + \dfrac{d\zeta'_0}{dz'_0}, \end{cases}$$

D_1, D_2, D_3, D_4 ayant (ainsi que Δ) la même signification que dans le § précédent.

On en conclut qu'on a pour des indices i et k quelconques:

$$D_i D_k \varphi = 0$$

et par conséquent

(4) $$\Delta \Delta \varphi = 0,$$

ou bien encore

(4^{bis}) $$D_i \Delta \varphi = \Delta D_i \varphi = 0.$$

La solution générale de l'équation (4) est

$$\varphi = \sum X_n + \sum Y_n R + \sum U_n R^{-n} + \sum V_n R^{-1-n},$$

X_n, Y_n, U_n, V_n désignant des polynômes sphériques d'ordre n et d'ailleurs

$$R = z z_0 + z' z'_0.$$

Comme la fonction φ doit rester régulière pour $R = 0$, il restera:

$$\varphi = \sum X_n + \sum Y_n R,$$

ou

(5) $$\varphi = X + YR,$$

avec

$$X = \sum X_n, \; Y = \sum Y_n, \; \Delta X = 0, \; \Delta Y = 0.$$

Les équations (4^{bis}) nous donnent:

$$D_i \Delta (YR) = 0.$$

Nous avons d'ailleurs:

$$\Delta \varphi = \sum \Delta (Y_n R) = \sum (2 + n) Y_n,$$

de sorte que les équations (4^{bis}) deviennent

$$\sum (2 + n) D_i (Y_n) = 0,$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$D_i (Y_n) = 0, \quad D_i (Y) = 0.$$

Calculons maintenant $D_i D_k (Y R)$; nous trouvons, en nous reportant aux formules qui donnent $D_i (Q R^k)$ et y faisant $k = 1$, $Q = Y$, $D_i Y = 0$:

(6) $$\begin{cases} D_1 (YR) = z \dfrac{dY}{dz} + z_0 \dfrac{dY}{dz} + Y, \\ D_2 (YR) = z \dfrac{dY}{dz'} + z'_0 \dfrac{dY}{dz_0}, \\ D_3 (YR) = z' \dfrac{dY}{dz} + z_0 \dfrac{dY}{dz'_0}, \\ D_4 (YR) = z' \dfrac{dY}{dz'} + z'_0 \dfrac{dY}{dz'_0} + Y. \end{cases}$$

Les équations $D_i (Y) = 0$ nous apprennent que Y est la somme d'une fonction de z et de z' et d'une fonction de z_0 et z'_0. Il en résulte immédiatement qu'il en est de même des seconds membres des équations (6) et par conséquent que l'on a

$$D_i D_k (YR) = 0.$$

Comme $D_i D_k \varphi = 0$, on aura de même:

$$D_i D_k X = D_i D_k Y = 0. \tag{7}$$

Pour $R = 1$, φ se réduit à ψ *qui est une fonction connue,* et on a d'ailleurs

$$\varphi = X + Y.$$

Si donc nous posons:

$$Q = X + Y,$$

la fonction Q régulière à l'intérieur de l'hypersphère et satisfaisant à $\Delta Q = 0$ se réduira à ψ sur la surface de l'hypersphère. *La fonction Q est donc entièrement déterminée et peut être regardée comme une donnée de la question.*

A cause des équations (7) on devra avoir:

$$D_i D_k Q = 0. \tag{8}$$

C'est là une première condition pour que le problème étendu comporte une solution.

Nos équations prouvent que Y, $D_1 X$, $D_2 X$, $D_3 X$, $D_4 X$ sont égaux à une fonction de z et de z', plus une fonction de z_0 et de z'_0; écrivons donc:

$$Y = U + U_0, \quad D_i(X) = V_i + V_i^0,$$

où U et V_i sont fonctions de z et z', U_0 et V_i^0 fonctions de z_0 et z'_0.

Nous pourrons écrire:

$$D_i \varphi = W_i + W_i^0,$$

où W_i dépend de z et z', et W_i^0 de z_0 et z'_0. On a alors:

$$\left\{\begin{aligned} W_1 &= V_1 + U + z\frac{dU}{dz}, & W_2 &= V_2 + z\frac{dU}{dz'}, \\ W_3 &= V_3 + z'\frac{dU}{dz}, & W_4 &= V_4 + U + z'\frac{dU}{dz'}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Quant à W_1^0, W_2^0, W_3^0, W_4^0, il sont naturellement imaginaires conjugués de W_1, W_2, W_3, W_4 et nous ne les écrirons pas explicitement.

On a

$$D_i X = D_i Q = V_i + V_i^0$$

et comme Q est une fonction connue, les fonctions V_i doivent être regardées comme connues.

La comparaison des équations (3) et (9) nous donne alors:

$$\frac{d\zeta}{dz} = V_1 + U + z\frac{dU}{dz} + C_1, \quad \frac{d\zeta}{dz'} = V_2 + z\frac{dU}{dz'} + C_2,$$

$$\frac{d\zeta'}{dz} = V_3 + z'\frac{dU}{dz} + C_3, \qquad \frac{d\zeta'}{dz'} = V_3 + U + z'\frac{dU}{dz'} + C_4,$$

les C étant des constantes; on tire de là par intégration:

$$\left\{\begin{aligned} \zeta &= Uz + C_1 z + C_2 z' + \int (V_1 dz + V_2 dz'), \\ \zeta' &= Uz' + C_3 z + C_4 z' + \int (V_3 dz + V_4 dz'). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Il faut donc que

$$V_1 dz + V_2 dz', \quad V_3 dz + V_4 dz'$$

soient des différentielles exactes, et *c'est là la seconde condition pour que le problème soit possible.*

Posons ensuite :

$$C_1 z + C_2 z' + \int (V_1 dz + V_2 dz') = \eta,$$

$$C_3 z + C_4 z' + \int (V_3 dz + V_4 dz') = \eta'.$$

Les fonctions η et η' dépendent seulement de z et z' et elles sont entièrement déterminées, *à trois constantes près pour chacune d'elles* (à savoir pour η, C_1, C_2 et la constante d'intégration).

Cela posé, les équations (10) nous donnent :

$$\varphi = (U + U_0)R + \eta z_0 + \eta_0 z + \eta' z'_0 + \eta'_0 z'$$

et comme $Y = U + U_0$, on aura, d'après (5) :

$$(11) \qquad \begin{cases} X = \eta z_0 + \eta_0 z + \eta' z'_0 + \eta'_0 z', \\ Y = Q - \eta z_0 - \eta_0 z - \eta' z'_0 - \eta'_0 z'. \end{cases}$$

Les fonctions X et Y seront donc déterminées à un certain nombre de constantes près. Pour que le problème se trouve résolu, il faut et il suffit que la valeur de Y déduite des équations (11) satisfasse aux conditions

$$D_i Y = 0.$$

Car alors on pourra poser $Y = U + U_0$ et les équations (10) nous donneront la solution du problème. Mais il est aisé de voir que l'on trouve :

$$D_1 Y = D_1 Q - \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\eta_0}{dz_0} = V_1 + V_1^0 - V_1 - V_1^0 - C_1 - C_1^0$$

avec trois autres équations analogues, et par conséquent que l'on peut choisir les constantes de façon que

$$D_i Y = 0.$$

Les deux conditions énoncées plus haut sont donc suffisantes.

Quelque incomplets qu'ils soient, les résultats précédents suffiront, je pense, pour montrer à quel point le problème qui nous occupe se présente sous un jour différent pour les fonctions d'une variable et pour celles de deux variables. J'espère pourtant que, quand on aura mis la chose au point, les considérations de ce genre rendront pour les fonctions de deux variables des services analogues à ceux qu'elles ont déjà rendus pour les fonctions d'une variable.

Paris, janvier 1907.

H. POINCARÉ.