SUR LA THÉORIE DE LA COMMUTATION

La théorie habituelle de la commutation conduit à des conséquences souvent paradoxales et qui ne sont pas toujours d'accord avec l'expérience. Pour discuter ces conséquences, il ne sera pas nécessaire d'envisager le problème complexe de la commutation; il suffira de considérer un problème beaucoup plus simple, mais où la même difficulté essentielle se présente.

Supposons un circuit fermé, on aura :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E,$$

i étant l'intensité, L, la self-induction, E, la force électromotrice, R, la résistance.

Supposons que ce circuit comprenne un contact glissant analogue à celui qui se produit entre un balai et une lame de collecteur. Nous pouvons nous représenter par exemple deux parallélépipèdes métalliques, appliqués l'un sur l'autre, la surface de contact étant plane et variable si l'un des parallélépipèdes est mobile.

Supposons que le circuit soit rompu à l'époque $t = 0$, de telle sorte que la surface de contact soit nulle pour $t = 0$ et pour $t > 0$ et proportionnelle à $-t$ pour $t < 0$. Dans ces conditions, on aura :

$$R = R_0 - \frac{\rho}{t},$$

R_0 est la résistance du circuit en dehors de celle qui se produit au contact; cette résistance peut être regardée comme constante. Quant à $-\frac{\rho}{t}$, c'est la résistance au contact, je mets le signe — parce que t est négatif.

L'équation devient donc :

$$L\frac{di}{dt} + \left(R_0 - \frac{\rho}{t}\right)i = E. \qquad (1)$$

Supposons que E soit variable et développable suivant les puissances entières de t, l'intégration de l'équation (1) nous donnera un développement contenant des termes de la forme

$$t^m \text{ et } t^{\alpha+m},$$

m étant un entier et α une quantité fractionnaire qu'il s'agit de déterminer.

En prenant seulement les termes $t^{\alpha+m}$, on aura la solution de l'équation sans second membre :

$$L\frac{di}{dt} + \left(R_0 - \frac{\rho}{t}\right)i = 0.$$

Soit At^α le premier terme du développement de i, on aura, en égalant à 0 le coefficient de $t^{\alpha-1}$ dans le premier membre de l'équation :

$$A\alpha L - \rho = 0,$$

d'où :

$$\alpha = \frac{\rho}{L}.$$

Si $\frac{\rho}{L}$ est plus petit que 1, le terme At^α est le principal terme de i, et on voit que $\frac{di}{dt}$, et $\frac{i}{t}$, c'est-à-dire la densité du courant, devient infinie pour $t = 0$.

Nous trouvons en effet :

$$i = Ce^{-\int\frac{Rdt}{L}} + e^{-\int\frac{Rdt}{L}}\int\frac{E}{L}e^{\int\frac{Rdt}{L}}dt,$$

les intégrales étant prises entre 0 et t. Le premier terme n'est autre chose que la solution de l'équation sans second membre, et le second est divisible par t, à moins que E ne soit infini pour $t = 0$.

C'est là la conséquence qui, quoique un peu paradoxale, est généralement admise.

Elle subsiste quelle que soit la loi suivant laquelle varie E, à moins que E ne devienne lui-même infini pour $t = 0$.

Ces résultats ont paru paradoxaux à plusieurs électriciens, qui s'étonnaient de voir certaines machines fonctionner convenablement sans que l'inégalité en question fût satisfaite.

M. Bethenod, dont l'attention avait été attirée sur ce point par M. Latour, émit l'idée que l'explication pourrait être cherchée dans des effets de capacité. Cette idée était juste, ainsi que nous allons le voir. Cherchons donc à compléter la théorie précédente en tenant compte de ces effets.

Les deux surfaces, n'étant pas en contact absolu, forment une espèce de condensateur, et *il convient de faire le calcul comme si ce condensateur était en dérivation sur le circuit.*

Envisageons alors les deux circuits :

MAPB, PANB.

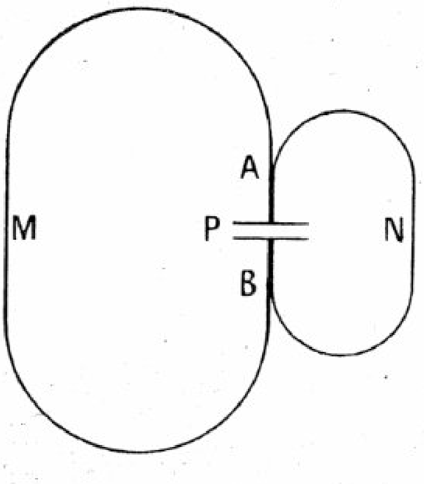

Fig. 1.

Soient $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, les courants qui circulent dans les deux circuits; la charge du condensateur pourra être représentée par $q_1 - q_2$, et sa capacité (proportionnelle à la surface de contact et par conséquent au temps) par $-\frac{t}{\gamma}$. La self-induction du premier circuit sera sensiblement L et sa résistance sensiblement R_0, car il ne comprend pas la résistance au contact. Soit N la self-induction du second circuit, et M le coefficient d'induction mutuelle. La résistance du second circuit sera sensiblement $-\frac{\rho}{t}$.

Les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} & L\frac{d^2q_1}{dt^2} + M\frac{d^2q_2}{dt^2} + R_0\frac{dq_1}{dt} - \frac{\gamma}{t}(q_1 - q_2) = E \\ & M\frac{d^2q_1}{dt^2} + N\frac{d^2q_2}{dt^2} - \frac{\rho}{t}\frac{dq_2}{dt} - \frac{\gamma}{t}(q_2 - q_1) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Il s'agit de savoir si, dans le développement de $\frac{dq_1}{dt}$ ou de $\frac{dq_2}{dt}$, il y aura un terme en t^α, α étant plus petit que 1. Supposons que ce terme existe et soit

$$A_1 t^{\alpha+1}, \qquad A_2 t^{\alpha+1},$$

les termes correspondants de q_1 et de q_2. Egalons dans les deux membres des équations (2) les coefficients de $t^{\alpha-1}$: ces termes, s'ils existent, seront les termes du plus petit degré et ne pourront se détruire avec aucun autre. On obtient ainsi les équations

$$\begin{aligned} & L(\alpha+1)\alpha A_1 + M(\alpha+1)\alpha A_2 = 0 \\ & M(\alpha+1)\alpha A_1 + N(\alpha+1)\alpha A_2 - \rho(\alpha+1)A_2 = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

d'où, en éliminant A_1 et A_2 :

$$L\left(N - \frac{\rho}{\alpha}\right) = M^2,$$

d'où :

$$\frac{\rho}{\alpha} = N - \frac{M^2}{L}.$$

La condition, pour que la densité du courant ne devienne pas infinie, n'est donc pas

$$\rho > L$$

mais

$$\rho > N - \frac{M^2}{L}.$$

Comparons ces deux conditions ; nous observerons d'abord que $N - \frac{M^2}{L}$ est toujours positif, et toujours plus petit que N, et en second lieu que N est beaucoup plus petit que L.

Le circuit PANB est en effet beaucoup plus petit que le circuit MAPB. Il est formé par les lignes de courant qui vont d'une des surfaces en contact à l'autre, et fermé par les lignes de force électrique qui reviennent de la seconde surface à la première. Ces lignes de courant comme ces lignes de force sont sensiblement normales aux deux surfaces de sorte que les lignes de courant le long desquelles marche le courant de conduction d'aller et les lignes de force le long desquelles revient le courant de déplacement de retour coïncident à fort peu près, et que l'aire du circuit est presque nulle. Ainsi *la nouvelle condition sera presque toujours remplie.*

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas plus complexe de la commutation. La quantité ρ doit être plus grande, non pas que la self-induction des spires mises en court-circuit, mais que la self du circuit presque infinitésimal formé par les lignes de courant qui vont de la surface du balai à celle du collecteur et fermé par les lignes de force qui reviennent du collecteur au balai.

Pour terminer, faisons la remarque suivante. C'est la présence de la capacité $\frac{t}{\gamma}$ qui est le point de départ de l'analyse précédente ; c'est grâce à elle que la densité du courant ne devient pas infinie ; et cependant dans les équations (3) et dans la formule finale, cette capacité ne figure pas.

Il y a là un paradoxe qui s'explique aisément. Quelque petite que soit cette capacité, la densité du courant ne pourra devenir infinie, mais elle pourra dans certains cas devenir très grande et la valeur maximum qu'elle pourra atteindre sera d'autant plus grande que cette capacité sera plus faible. Et c'est pour cette raison que l'analyse donnait une densité infinie quand on ne tenait pas compte de cette capacité.

H. Poincaré.