

CONFÉRENCES

SUR LA

AZ 54

n° 2836

TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

388

PAR

H. POINCARÉ

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE



1909

EDITIONS DE "LA LUMIÈRE ÉLECTRIQUE"

40, RUE DES ÉCOLES, 40

PARIS

CONFÉRENCES

SUR LA

TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

ÉMISSION

Mon intention n'est pas de vous faire une théorie complète de la télégraphie sans fil, mais de vous exposer quelques théories mathématiques susceptibles de faciliter l'intelligence de ces phénomènes. Je commence par vous rappeler les équations de Maxwell, qui sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 4\pi \left(u + \frac{df}{dt} \right) &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi \left(v + \frac{dg}{dt} \right) &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi \left(w + \frac{dh}{dt} \right) &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{aligned} \quad (2)$$

$$4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$$

$$4\pi g = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \quad (3)$$

$$4\pi h = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}$$

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho. \quad (4)$$

Ces équations donnent lieu aux réflexions suivantes : α, β, γ est la force magnétique ; f, g, h , le déplacement électrique proportionnel à la force électrique ; u, v, w , le *courant de conduction*, de telle sorte que $u + \frac{df}{dt}$ représente le courant total. Il nous est permis de considérer tous les milieux comme non magnétiques. Les seuls milieux envisagés sont en effet l'air, assimilable au vide, et des métaux, qui, vis-à-vis d'oscillations de haute fréquence, se comportent comme s'ils étaient parfaitement conducteurs, de sorte que les courants et le magnétisme ne peuvent pénétrer à l'intérieur. Leur pouvoir diélectrique est inconnu, mais comme ses effets sont négligeables, nous pouvons le supposer égal à celui du vide. Nous choisirons alors les unités de telle sorte que ce pouvoir inducteur du vide et par conséquent la vitesse de la lumière dans le vide soient égaux à l'unité. Nous en serons quittes pour rétablir l'homogénéité à la fin du calcul, si nous voulons revenir aux unités habituelles.

Les lettres F, G, H désignent le potentiel vecteur et ρ la densité électrique. Nous remarquons que $\alpha, \beta, \gamma, \rho, u, v, w, f, g, h$ sont des quantités expérimentalement définies, mais qu'il n'en est pas de même de F, G, H. D'un autre côté les équations ne suffisent pas pour les définir complètement et permettent de modifier leur définition dans une certaine mesure, à la condition de modifier celle de ψ d'une façon corrélative. De là, trois définitions principales du potentiel vecteur.

1° *Potential vecteur de Maxwell*. — Si l'on s'impose la condition

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0,$$

il vient :

$$4\pi \left(u + \frac{df}{dt} \right) = -\Delta F$$

$$4\pi \rho = -\Delta \psi,$$

ce qui montre que ψ est le potentiel électrostatique ordinaire et que les composantes du potentiel vecteur sont des potentiels newtoniens dus à des matières attirantes ayant respectivement pour densités les composantes correspondantes du courant *total* ; c'est la solution de Maxwell.

2° *Potential vecteur de Lorentz*. — Si l'on s'impose la condition :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} + \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

il vient :

$$4\pi u = \frac{d^2 F}{dt^2} - \Delta F$$

$$4\pi \rho = \frac{d^2 \psi}{dt^2} - \Delta \psi.$$

On voit que ψ , F , G , H sont des potentiels *retardés*, c'est-à-dire calculés en partant de la densité de la matière attirante, non à l'instant considéré t mais à un instant antérieur $t-r$, r étant la distance du point attirant au point attiré; de telle sorte que la lumière partant du point attirant à cet instant antérieur $t-r$, arrive au point attiré à l'instant t .

Alors ψ est le potentiel *retardé* dû à la densité électrostatique ρ ; tandis que F , G , H sont les potentiels *retardés* dus aux trois composantes u , v , w du courant de conduction. C'est la solution de Lorentz.

3° *Potentiel vecteur de Hertz.* — La solution de Hertz n'est applicable que quand le champ est de révolution autour de l'axe des x par exemple. On a alors $\alpha = 0$ et on peut supposer

$$G = H = 0.$$

Sauf avis contraire, nous ferons toujours usage du potentiel vecteur de Lorentz, et quand nous emploierons celui de Hertz ou de Maxwell nous affecterons les lettres F , G , H , d'une astérisque.

Les oscillations étant de très haute fréquence, on peut supposer :

1° *Qu'à l'intérieur des conducteurs il ne se passe*

rien, les courants de conduction étant localisés à la surface.

2° *Que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface des conducteurs.*

Mais ce n'est là qu'une première approximation.

Energie et radiation. — L'énergie électrique a pour expression

$$\int 2\pi (f^2 + g^2 + h^2) d\tau,$$

et l'énergie magnétique

$$\int \frac{d\tau}{8\pi} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

De plus, en vertu du théorème de Poynting, la quantité d'énergie qui traverse une surface infiniment petite ds pendant le temps dt est égale à $\frac{d\sigma dt}{4\pi}$ multiplié par l'aire du parallélogramme

construit sur les projections de la force magnétique et du déplacement électrique sur la surface.

Si donc on considère le *vecteur radiant* dont les composants sont :

$$\frac{g\gamma - h\beta}{4\pi}, \quad \frac{h\alpha - f\gamma}{4\pi}, \quad \frac{f\beta - g\alpha}{4\pi},$$

cette quantité d'énergie rayonnée est égale à $d\rho dt \times N$, N étant la composante du vecteur radiant normale à l'élément de surface.

Solution de ces équations.

Il ne peut exister de solution non amortie, car il y a une certaine dissipation d'énergie par rayonnement, mais il existera une solution périodique amortie.

Une pareille solution est de la forme

$$F = \mathcal{R}(ae^{\omega t}).$$

(\mathcal{R} signifiant partie réelle de) ω est une quantité complexe que nous pouvons supposer de la forme

$$\omega = -\frac{\sigma}{T} + \frac{2i\pi}{T}.$$

$\frac{\sigma}{T}$ est le décrement logarithmique rapporté à l'unité de temps, σ le décrement logarithmique, T la période.

Pour notre étude nous pouvons considérer soit les solutions réelles de nos équations, soit les solutions imaginaires dont nous prendrons ensuite les parties réelles, car ces parties réelles satisferont également aux équations. Employons cette deuxième méthode qui présente certains avantages. Nous avons donc à chercher des solutions proportionnelles à $ae^{\omega t}$. Il suffira de prendre les mêmes équations en remplaçant par exemple :

$$\frac{dF}{dt} \text{ par } \omega F \quad \text{et} \quad \frac{df}{dt} \text{ par } \omega f.$$

Nous n'aurons plus t dans ces équations. Nous aurons comme inconnues les inconnues précédentes et de plus ω .

Ces équations devront être satisfaites dans

l'air; comme dans l'air il n'y a pas de courant de conduction nous supposons $u = v = w = 0$. Nous aurons ainsi à déterminer les quantités

$$\psi, fgh, FGH, \alpha\beta\gamma.$$

Ainsi posé, le problème est d'une complication très grande. Il a une infinité de solutions correspondant au terme fondamental et aux différents termes que nous pouvons encore appeler harmoniques, bien que les périodes soient incommensurables les unes avec les autres.

Cas de la sphère. — Ici nous prendrons le potentiel de Hertz

$$G = H = 0,$$

on a trouvé le son fondamental

$$F = \mathcal{R} \left[\frac{Be^{\omega(t-r)}}{r} \right]$$

avec

$$\omega = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}} \right)$$

a étant le rayon de la sphère.

Nous indiquons seulement cette solution sans nous y arrêter, ce cas étant trop éloigné de la pratique.

Cas général. — Dans quelle mesure la formule de Thomson

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

est-elle applicable? (T , période; L = self-induction; C , capacité du circuit.)

1° Elle suppose qu'il n'y a pas d'amortissement ; donc elle ne s'applique que lorsqu'on peut négliger l'amortissement.

2° Considérons le déplacement électrique $fg h$. Dans le cas d'une oscillation dont nous négligeons l'amortissement, il est proportionnel à $\cos(\lambda t + \mu)$, λ et μ étant des constantes, μ la phase.

Si la phase est la même dans tout l'espace, le champ électrique est proportionnel à $\cos \lambda t$ (en la supposant nulle) et le champ magnétique, qui est décalé de $\frac{\pi}{2}$, est proportionnel à $\sin \lambda t$.

$$\Sigma f^2 \text{ sera proportionnel à } \cos^2 \lambda t$$
$$\Sigma h^2 \text{ sera proportionnel à } \sin^2 \lambda t.$$

L'énergie électrostatique sera donc de la forme $A \cos^2 \lambda t$.

L'énergie magnétique sera donc de la forme $B \sin^2 \lambda t$.

L'énergie totale sera constante si

$$A \cos^2 \lambda t + B \sin^2 \lambda t = c^{te},$$

c'est-à-dire si $A = B$. Quelle est la signification des constantes A et B ?

Désignons par e la charge électrique en un point du conducteur, par exemple la charge électrique maxima; si i est l'intensité du courant, $i = \frac{de}{dt}$. Dans un fil, l'intensité n'est pas constante, mais l'intensité i sera par définition la dérivée de e .

L'énergie électrique sera

$$\frac{e^2}{2C},$$

C étant la capacité
L'énergie magnétique

$$\frac{L i^2}{2},$$

L est la self-induction

Il faut faire attention à ce qu'est la self-induction dans le cas qui nous occupe. Le courant i n'est pas le même partout : il est maximum près de l'éclateur et minimum à la pointe. Pour calculer L, on supposera un courant décroissant dont le maximum sera i et de l'expression de

l'énergie $\frac{L i^2}{2}$, où i est ce maximum, on déduira L. De la même manière on calculera C au moyen de l'expression $\frac{e^2}{2C}$ où e est le maximum de la charge.

Nous avons donc défini C et L; et on observera que ces définitions ne sont pas tout à fait les mêmes que pour un courant constant et uniforme ou que pour une charge en équilibre électrostatique

e est de la forme

$$e = \cos \lambda t,$$

d'où

$$i = -\lambda \sin \lambda t.$$

L'énergie électrique sera

$$\frac{\cos^2 \lambda t}{2C}$$

et l'énergie magnétique

$$\lambda^2 \frac{\sin^2 \lambda t L}{2}$$

Egalons entre eux les coefficients A et B respectivement égaux à

$$\frac{1}{2C} \quad \text{et} \quad \frac{L\lambda^2}{2};$$

il vient

$$L\lambda^2 = \frac{1}{C}.$$

C'est la formule de Thomson.

En réalité, les choses ne se passent pas ainsi. Dans le champ à l'infini, l'intensité électrique est bien $\cos(\lambda\tau + \mu)$, mais μ n'est pas le même dans tout le champ en supposant même que μ soit le même dans tout le conducteur. (Il en est ainsi dans l'antenne, mais il n'en serait peut-être pas de même dans un système plus compliqué). Car il y a un retard dans le champ représentant la durée de la propagation entre l'antenne et le point du champ considéré.

L'énergie électrique aura alors pour expression.

$$A \cos^2 \lambda t + 2A' \cos \lambda t \sin \lambda t + A'' \sin^2 \lambda t$$

et l'énergie magnétique

$$B' \cos^2 \lambda t + 2B' \sin \lambda t \cos \lambda t + B \sin^2 \lambda t.$$

Ecrivons que l'énergie est constante

$$A' + B' = 0 \quad A + B'' = A'' + A.$$

Ce ne sont plus les mêmes conditions que précédemment. Dans quelle mesure est-il permis d'appliquer la formule de Thomson? Une circonstance nous sauve. Les antennes sont filiformes, et le champ est beaucoup plus fort dans le voisinage de l'antenne qu'ailleurs; comme la phase est la même d'un bout à l'autre du conducteur, ainsi que nous l'avons admis, il se trouve que, dans la partie la plus forte du champ, la phase est constante.

Nous pouvons donc en première approximation appliquer la formule de Thomson, en prenant garde toutefois à la définition de L et C.

Dans un cas particulier, la formule est applicable sans restriction; c'est celui où le circuit se compose d'un condensateur dont les armatures sont reliées par un fil métallique. Ici l'intensité peut être considérée comme constante, car la longueur du fil est très petite par rapport à la longueur d'onde et la variation de l'intensité du courant le long du fil est très faible.

Le champ est concentré entre les deux armatures du condensateur. C'est du reste pour ce cas que la formule de Thomson avait été établie.

ÉTUDE DE L'AMORTISSEMENT

Emission. — Nous devons, d'après ces données, déterminer les conditions dont dépendent la longueur d'onde et l'amortissement d'un exciteur donné. Pour faire cette étude nous supposons d'abord un exciteur isolé placé dans un

espace indéfini. A vrai dire, ce n'est pas le cas de la pratique, puisqu'on a ordinairement une antenne plus ou moins longue reliée à la terre qui peut être regardée comme conductrice. La terre pourra être regardée comme limitée par un plan, soit $z = 0$; et les lignes de force électrique devront aboutir normalement à ce plan. On sait que tout se passera comme si la terre n'existait pas et si le champ était symétrique par rapport au plan $z = 0$; de telle façon que quand on change x, y, z , en $x, y, -z$, les diverses quantités $\alpha, \beta, \gamma, f, g, h, F, G, H, \rho, \psi, u, v, w$ se changent en: $\alpha, \beta, -\gamma, -f, -g, h, -F, -G, H, -\rho, -\psi, -u, -v, w$. Tout se passe donc comme si on supprimait la terre et si on ajoutait à l'antenne son image par rapport au plan $z = 0$, l'excitateur fictif formé par l'antenne et son image se trouvant ainsi isolé dans l'espace.

Champ en un point éloigné. — La première chose à faire est d'étudier le champ en un point très éloigné de l'excitateur; nous allons supposer un régime établi avec une oscillation amortie, on aura alors pour le courant de conduction :

$$u = \mathcal{R}(u_0 e^{\omega t}), \quad v = \mathcal{R}(v_0 e^{\omega t}), \quad w = \mathcal{R}(w_0 e^{\omega t}).$$

ω est une quantité imaginaire dont dépendent à la fois la période et l'amortissement; u_0, v_0, w_0 sont des fonctions de x, y, z , réelles ou complexes; et la notation \mathcal{R} signifie *partie réelle de*.

Quel sera alors en un point très éloigné le potentiel vecteur F, G, H ? on aura: $F = \mathcal{R}(F_0)$, F_0 étant le potentiel retardé dû à $u_0 e^{\omega t}$ ou, ce qui

revient au même, le potentiel ordinaire dû à $u_0 e^{\omega(t-r)}$; on aura donc :

$$F_0 = \int \frac{u_0 e^{\omega(t-r)} d\tau}{r}$$

Nous désignerons par x, y, z les coordonnées du point attiré, par ξ, η, ζ celles du point attirant, c'est-à-dire de l'élément $d\tau$, par r la distance de ces deux points; dans u_0 on aura donc remplacé x, y, z par ξ, η, ζ . Soit r_0 la distance du point x, y, z à l'origine et soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la droite qui joint ces deux points, on aura sensiblement, à cause du grand éloignement du point x, y, z :

$$r = r_0 - \lambda\xi - \mu\eta - \nu\zeta = r_0 - \Sigma\lambda\xi.$$

Au dénominateur nous pourrions remplacer r par r_0 , il n'en est pas de même dans l'exponentielle parce que ω est très grand et il restera :

$$F_0 = \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \int u_0 e^{\omega\Sigma\lambda\xi} d\tau.$$

Cette intégrale

$$A = \int \int \int u_0(\xi, \eta, \zeta) e^{\omega\Sigma\lambda\xi} d\xi d\eta d\zeta$$

est une fonction des trois cosinus directeurs λ, μ, ν et la formule précédente nous donne :

$$F = \mathcal{R} \left[A \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \right].$$

On trouverait de même :

$$G = \mathcal{R} \left[B \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \right], \quad H = \mathcal{R} \left[C \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \right].$$

B et C étant des intégrales analogues à A, mais où z_0 est remplacé par r_0 ou ν_0 .

Ces trois valeurs de A, B, C permettent de calculer le champ en un point très éloigné. Soit d'une façon générale

$$U = \mathcal{R} \left[M \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \right].$$

Dérivons par rapport à t

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{R} \left[M \omega \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \right].$$

Ceci introduit seulement le facteur ω .

Dérivons par rapport à x . Si je fais varier x, y, z , il en résulte une variation de r_0, λ, μ, ν .

M dépend de λ, μ, ν ; r_0 varie à la fois dans l'exponentielle et au dénominateur. Nous pouvons négliger les variations de M et du dénominateur car elles sont très lentes; les autres sont notables à cause de la présence du facteur ω .

Je remplacerai donc M par

$$- M \omega \frac{dr_0}{dx}$$

or

$$\frac{dr_0}{dx} = \lambda;$$

done

$$\frac{dU}{dx} = \mathcal{R} \left[\lambda M \omega \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \right]$$

Appliquons les formules et abrégeons les notations en écrivant $F \sim A$ ou F proportionnel à A au lieu d'écrire :

$$F = \mathcal{R} \left[A \frac{e^{\omega(t-r_0)}}{r_0} \right].$$

Nous aurons [formule (1)]

$$\alpha \sim \omega (\nu B - \mu C)$$

$$\beta \sim \omega (\lambda C - \nu A)$$

$$\gamma \sim \omega (\mu A - \lambda B).$$

De même [formule (2)]

$$4\pi f \sim \omega (\lambda \Sigma \lambda A - A)$$

$$4\pi g \sim \omega (\mu \Sigma \lambda A - B)$$

$$4\pi h \sim \omega (\nu \Sigma \lambda A - C).$$

Pour trouver la signification de ces équations, prenons pour un instant pour l'axe des x la droite qui joint l'origine au point du champ considéré.

Alors

$$\lambda = 1, \quad \mu = \nu = 0,$$

d'où

$$\alpha = 0, \quad \beta \sim \omega C, \quad \gamma \sim -\omega B,$$

$$f = 0, \quad g \sim -\omega B, \quad h \sim -\omega C.$$

Ceci montre qu'à grande distance : les ondes sont planes et transversales, la force magnétique est perpendiculaire et égale à la force électrique, et les valeurs de B et C représentent l'intensité du champ.

Ceci va nous permettre de calculer le vecteur radiant de Poynting.

A B C sont des fonctions connues de λ, μ, ν ; d'après ce que nous venons de voir, le champ électrique est proportionnel à la projection de A B C sur le plan de l'onde. D'autre part, le vecteur radiant qui est proportionnel à l'aire du parallélogramme construit sur le champ électrique et le champ magnétique, donc proportionnel au carré du champ électrique, donc proportionnel au carré de la projection du vecteur A B C sur le plan de l'onde. Le facteur de proportionnalité est

$$\frac{\omega^2}{4\pi r_0^2}$$

L'expression du vecteur radiant est donc

$$[|A^2| + |B^2| + |C^2| - |\Sigma\lambda\Delta|^2] \frac{\omega^2}{4\pi r_0^2}$$

Connaissant A B C, nous pouvons calculer la quantité d'énergie qui passe à travers une surface quelconque si cette surface est très éloignée, et par suite l'énergie totale rayonnée. Pour avoir l'amortissement il faut le comparer à l'énergie totale.

Pour calculer l'énergie totale, il faut connaître Σf^2 d'une part et Σa^2 de l'autre.

On calcule $\alpha \beta \lambda, f g h$ par les équations de Maxwell en partant de F, G, H; F G H se calculerait pour un point rapproché par les formules

$$F_0 = \int \frac{u_0 e^{\omega(t-r)}}{r} d\tau \quad H \dots$$

Pour que ce calcul soit possible, il faut connaître les courants de conduction u_0, v_0, ω_0 . Nous pouvons en première approximation admettre que le courant localisé à la surface de l'antenne décroît de la base de l'antenne au sommet proportionnellement à $\cos \frac{\pi \xi}{2l}$, l étant la longueur de l'antenne. C'est ce qui arriverait si l'amortissement était nul.

Ici se présente une difficulté théorique. Considérons la partie réelle d'une solution de nos équations, proportionnelle à $e^{\omega t}$ ou plutôt la partie réelle de cette solution. Formons l'intégrale qui représente l'énergie totale et étendons l'intégration du champ à l'infini. Supposons que nous donnions à l'amortissement une valeur quelconque, si petite soit-elle, et cherchons l'énergie totale, nous trouverons l'infini; voici pourquoi. Le champ est sensiblement proportionnel à

$$e^{\omega(t-r_0)},$$

or

$$\omega = -\frac{\sigma}{T} + \frac{2i\pi}{T},$$

Le module de l'exponentielle est $e^{\frac{\sigma r_0}{T}}$, qui croît indéfiniment avec r_0 . Nous allons donc trouver une énergie infinie.

Cela ne veut pas dire que *physiquement* l'énergie totale soit infinie. Ceci vient de ce que la perturbation ne s'étend pas à l'infini; elle a commencé à un moment déterminé et va en s'affaiblissant. Nous n'avons donc pas le droit d'intégrer à l'infini, mais sur une sphère de rayon R,

R étant le chemin parcouru par la lumière depuis l'origine de la perturbation.

Si ω a sa partie réelle nulle, c'est-à-dire si l'amortissement est nul, cette difficulté ne se présente pas. Comme l'amortissement est faible, nous pourrons calculer l'énergie totale en supposant l'amortissement nul et étendant le champ à l'infini. Une analyse plus approfondie montrerait que cette façon d'opérer est légitime.

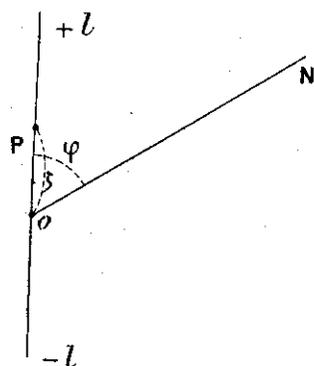


Fig. 1.

Remarque I. — Nous avons une antenne filiforme. Soit ρ le rayon du fil. En un point très voisin, le champ magnétique est sensiblement proportionnel à $\frac{1}{\rho}$. Dans l'expression de l'énergie magnétique le terme principal sera de la forme $A \log \rho$; donc, plus le fil est fin, plus l'énergie totale est grande.

Au contraire, le vecteur A, B, C et, par conséquent, l'énergie rayonnée ne dépend pas de ρ , mais de l'intensité i aux divers points de la longueur de l'antenne.

Par conséquent, si ρ décroît, l'énergie totale croît, l'énergie rayonnée est toujours la même; donc, plus ρ est petit, plus l'amortissement est faible; cependant la décroissance n'est pas très rapide.

Remarque II. — Soit une antenne rectiligne. Nous aurons à calculer

$$\int w_0 e^{i\omega \Sigma} d\tau$$

qui ici devient

$$\int_{-l}^{+l} w_0 e^{i\omega \zeta} d\zeta,$$

l étant la longueur de l'antenne supposée verticale.

Or

$$w = \cos \frac{2\pi}{4l} \zeta.$$

(le courant est nul aux extrémités et maximum au point o)
et

$$\omega = \frac{2i\pi}{4l}.$$

Nous aurons finalement

$$G = \int_{-l}^{+l} \cos \frac{2\pi \zeta}{4l} e^{\frac{2i\pi}{4l} \zeta} d\zeta.$$

L'énergie rayonnée sera maxima dans le sens horizontal pour l'antenne verticale. Hertz avait

vu ceci, mais dans l'expression de C il avait négligé le facteur exponentiel de sorte que C ne dépendait plus de ν ; l'amplitude du champ suivant un élément de surface perpendiculaire à la direction ON était proportionnelle à $\sin \varphi$, l'énergie rayonnée à $\sin^2 \varphi$. Hertz avait donc pu reconnaître la prédominance du rayonnement dans la direction équatoriale; mais en réalité la prédominance est beaucoup plus grande que Hertz ne l'avait prévue.

Cas de l'oscillateur fermé. — Ici le rayonne-

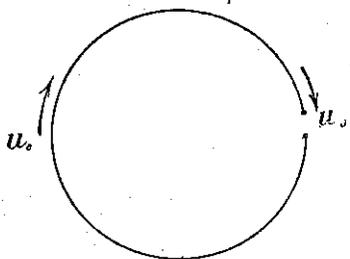


Fig. 2.

ment est beaucoup plus faible, car le courant u_0 par exemple est négatif à gauche et positif à droite et dans le calcul des intégrales A, B, C, on a des parties négatives qui se compensent partiellement. L'énergie totale étant la même, l'amortissement est beaucoup plus faible (fig. 2).

Si l'oscillateur se compose d'un condensateur dont les armatures sont réunies par un fil, l'énergie rayonnée est à peu près nulle, car l'intensité du courant est sensiblement la même en tous les points du fil. Sur une direction quelconque se

trouvent dans le fil deux éléments de courant égaux et de sens contraires.

La longueur d'onde étant très grande par rapport à la longueur du fil, les quantités $\omega \xi$, etc. sont petites et l'exponentielle

$$e^{\omega \Sigma \xi} = 1$$

sensiblement. Ainsi les effets des deux éléments de courant se détruisent sensiblement et l'énergie rayonnée est à peu près nulle.

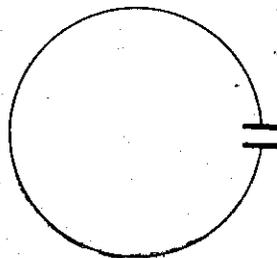


Fig. 3.

Cas de l'antenne rectiligne. — Abraham a fait le calcul de l'amortissement en remplaçant le cylindre rectiligne par un ellipsoïde de révolution très allongé.

Il a trouvé pour l'amortissement σ l'expression suivante :

$$\sigma = 9,74 \times \frac{1}{4 \log \frac{2l}{\rho}}$$

où l représente la longueur de l'antenne et ρ le rayon du fil.

Vérification expérimentale. — Tissot a trouvé pour σ avec une antenne de 2^m de rayon.

l	σ à terre	σ à bord	σ théorique (Abraham)
40 ^m	0,62	0,30	0,23
60 ^m	0,42	0,25	0,22

On vérifie donc bien que l'amortissement est d'autant plus faible que la longueur de l'antenne est plus grande.

À terre on trouve un amortissement presque double de celui d'une antenne à bord. Ceci vient de ce que l'amortissement se compose de deux parties : une partie correspondant à l'énergie rayonnée, l'autre due aux effets Joule que nous négligeons. Or, dans la prise de terre, les effets Joule sont considérables, tandis que, en mer, les terres sont bonnes.

Antennes multiples. — Tissot a comparé l'antenne simple à des antennes multiples. Il a trouvé que l'amortissement dans les antennes multiples est supérieur à celui de l'antenne simple. L'amortissement croît avec le nombre de branches et leur écartement.

Soient n le nombre de branches, L le coefficient de self-induction d'une branche, M le coefficient d'induction mutuelle de deux branches, i l'intensité supposée la même dans toutes les branches.

Le vecteur de Poynting étant ni , l'énergie rayonnée est proportionnelle à $n^2 i^2$.

L'énergie totale est due à la self-induction d'une part : dans une branche c'est $\frac{L i^2}{2}$, pour toute l'antenne ce sera $\frac{n L i^2}{2}$; à l'induction mutuelle d'autre part, ce qui donne : $\Sigma M i^2$.

L'amortissement a pour valeur

$$\frac{n^2 i^2}{\frac{1}{2} n L i^2 + \Sigma M i^2}$$

La formule indique bien que, si n croît, l'amortissement croît et que, si l'écartement croît, de sorte que M décroît, l'amortissement croît.

ÉTUDE DU CHAMP DANS LE VOISINAGE DE L'ANTENNE

I. Propagation d'une perturbation dans un conducteur filiforme.

Supposons d'abord un conducteur filiforme et rectiligne dont nous prendrons l'axe pour axe

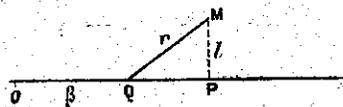


Fig. 4.

des z . Soit M (fig. 4) un point de coordonnées x, y, z , et soit $x^2 + y^2 = \rho^2$; supposons d'abord le courant de conduction localisé sur l'axe des z lui-même; soit

$$OQ = \beta, \quad QM = r,$$

d'où :

$$r^2 = (\beta - z)^2 + \rho^2$$

et soit i l'intensité en Q. Nous supposons

$$i = \varphi(t, \beta).$$

Alors on aura :

$$F = G = 0, \quad H = \int \frac{(t - r, \beta) d\beta}{r}$$

l'intégration étant étendue tout le long du fil.

Le cas le plus simple est celui où le courant se propage sans s'affaiblir, avec la vitesse de la lumière, par exemple, de la gauche à droite; on a alors :

$$i = \varphi(t - \beta), \quad H = \int \frac{d\beta}{r} \varphi(t - r - \beta).$$

On peut poser

$$t - r - \beta = -\alpha,$$

d'où :

$$d\alpha = dr + d\beta = d\beta \left(\frac{\beta - z}{r} + 1 \right) = \frac{d\beta}{r} (\alpha + t - z),$$

d'où :

$$H = \int \frac{d\alpha \varphi(-\alpha)}{\alpha + t - z}$$

Le champ magnétique a pour composantes $\frac{dH}{dy} = \frac{dH}{dx}, 0$; sa grandeur est $\frac{dH}{d\rho}$, or

$$\frac{dH}{d\rho} = \left[\frac{d\alpha}{d\rho} \frac{\varphi(-\alpha)}{\alpha + t - z} \right]_{\alpha_0}^{\alpha_1}$$

Voici le sens de cette notation; on a :

$$[\psi(\alpha)]_{\alpha_0}^{\alpha_1} = \psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_0),$$

α_0 et α_1 étant les valeurs de α qui correspondent aux deux extrémités du fil. On a d'ailleurs :

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = \frac{dr}{d\rho} = \frac{\rho}{r}.$$

Soient 0 et l les valeurs β qui correspondent aux deux extrémités du fil; soient r_0 et r_1 les distances de M à ces deux extrémités, on aura :

$$\alpha_0 = r_0 - t, \quad \alpha_1 = r_1 + l + t$$
$$\alpha_0 + t - z = r_0 - z, \quad \alpha_1 + t - z = r_1 + l - z,$$

d'où finalement :

$$\frac{dH}{d\rho} = \frac{\rho}{r_1} \frac{\varphi(t - r_1 - l)}{r_1 + l - z} - \frac{\rho}{r_0} \frac{\varphi(t - r_0)}{r_0 - z}$$

Si nous supposons ρ très petit, on a en première approximation

$$r_0 = z, \quad r_1 = l - z,$$

et en deuxième approximation

$$r_0 - z = \frac{\rho^2}{r_0 + z} = \frac{\rho^2}{2z},$$



c'est-à-dire que $r_0 - z$ est de l'ordre de ρ^2 , tandis que $r_1 + l - z$ est fini; le terme principal sera donc :

$$\frac{dH}{d\rho} = -\frac{\rho}{r_0} \frac{\varphi(t - r_0)}{r_0 - z} = -\frac{2}{\rho} \varphi(t - z).$$

C'est-à-dire que le champ magnétique dans le voisinage du fil est sensiblement le même que si le courant était uniforme. Nous tirons de là une première approximation pour H

$$H = -2\varphi(t - z) \log \rho,$$

où on néglige les quantités finies. Nous allons passer à une deuxième approximation où nous négligerons les quantités de l'ordre de ρ ou même de $\rho^2 \log \rho$.

Supposons d'abord $\varphi = \text{const.}$; il vient :

$$H = \int \frac{\varphi d\beta}{r} = \varphi \left[\log (\beta - z + \sqrt{(\beta - z)^2 + \rho^2}) \right]_0^l$$

ou approximativement :

$$H = -2\varphi \log \frac{\rho}{\sqrt{z(l-z)}}$$

Si maintenant φ n'est plus une constante, nous pourrons écrire :

$$H = -2\varphi(-\alpha_0) \log \frac{\rho}{\sqrt{z(l-z)}} + \int \frac{\varphi(-\alpha) - \varphi(\alpha_0)}{\alpha + t - z} d\alpha.$$

Mais on a sensiblement pour $\beta < z$

$$r = z - \beta, \quad \alpha = \beta + r - t = z - t = \alpha_0$$

et pour $\beta > z$

$$r = \beta - z, \quad \alpha = 2\beta - z - t, \quad \alpha + t - z = 2(\beta - z)$$

d'où :

$$H = -2\varphi(t - z) \log \frac{\rho}{\sqrt{z(l-z)}} + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\varphi(z + t - 2\beta) - \varphi(t - z)}{2(\beta - z)} d\alpha,$$

Dans l'intégrale $\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}$ la quantité sous le signe \int est constamment finie, pourvu que la fonction φ ait une dérivée.

Pour aller plus loin remarquons que

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{dH}{dz} = 0,$$

ce qui nous permet de poser

$$H = \frac{d\Pi}{dt}, \quad \psi = -\frac{d\Pi}{dz}.$$

Posons d'autre part :

$$i = \varphi(t, \beta) = \frac{d\Phi(t, \beta)}{dt}$$

de telle sorte que $-\frac{d\Phi}{d\beta} d\beta$ représente la quantité d'électricité contenue sur l'élément $d\beta$ du fil, nous aurons alors :

$$\Pi = \int \frac{\Phi(t - r, \beta) d\beta}{r}$$

et cette intégrale tout à fait pareille à celle qui définit H se traiterait de la même manière. On a donc

$$\alpha = \frac{d^2 \Pi}{dy dt}, \quad \beta = -\frac{d^2 \Pi}{dx dt}, \quad \gamma = 0.$$

$$4\pi f = \frac{d^2 \Pi}{dx dz}, \quad 4\pi g = \frac{d^2 \Pi}{dy dz},$$

$$4\pi h = \frac{d^2 \Pi}{dz^2} - \frac{d^2 \Pi}{dt^2} = -\frac{d^2 \Pi}{dx^2} - \frac{d^2 \Pi}{dy^2},$$

d'où :

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{dH}{d\rho} = \frac{d^2 \Pi}{d\rho dt}, \quad 4\pi \sqrt{f^2 + g^2} = \frac{d\rho dz}{d^2 \Pi},$$

$$4\pi h = -\frac{d^2 \Pi}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d\Pi}{d\rho}.$$

Revenons au cas où $\Phi(t, \beta)$ est de la forme $\Phi(t - \beta)$, on voit que, pour un point très voisin du fil, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\sqrt{f^2 + g^2}$ sont de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$, tandis que h est fini. C'est le calcul de h que je voudrais pousser jusqu'au bout. On aura :

$$\frac{d\Pi}{d\rho} = \frac{\rho}{r_1} \frac{\Phi(t - r_1 - l)}{r_1 + l - z} - \frac{\rho}{r_0} \frac{\Phi(t - r_0)}{r_0 - z},$$

ce que je puis écrire :

$$\frac{d\Pi}{d\rho} = \rho \Theta_1(r_1, z, t) - \frac{1}{\rho} \Theta_0(r_0, z, t),$$

en posant :

$$\Theta_1 = \frac{\Phi(t - r_1 - l)}{r_1(r_1 + l - z)}, \quad \Theta_0 = \Phi(z - r_0) \left(1 + \frac{z}{r_0}\right).$$

On en déduit :

$$4\pi h = -2\Theta_1 - \frac{\rho^2}{r_1} \Theta_1' + \frac{\Theta_0'}{r_0};$$

$$\left(\Theta_0' = \frac{d\Theta_0}{dr_0}, \quad \Theta_1' = \frac{d\Theta_1}{dr_1}\right)$$

ou pour ρ très petit

$$4\pi h = -2\Theta + \frac{\Theta_0'}{r_0}.$$

Nous sommes donc conduit à calculer les valeurs de Θ_1 et de Θ_0' pour $\rho = 0$. Il vient :

$$r_1 = l - z; \quad r_0 = z,$$

d'où :

$$\Theta_1 = \frac{\Phi(t + z - 2l)}{2(l - z)^2}$$

$$\Theta_0' = -\Phi_0' \left(1 + \frac{z}{r_0}\right) \Phi(t - r_0) \frac{z}{r_0^2} = -2\Phi_0' - \frac{r_0}{\Phi}.$$

Or $\Phi_0' = +\varphi(t - z)$, et il reste :

$$4\pi h = -\frac{2\varphi(t - z)}{z} - \frac{\Phi(t - z)}{z^2} - \frac{\Phi(t + z - 2l)}{(l - z)^2}.$$

$4\pi h$ peut être considéré comme une fonction

connue de t et z quand on connaît Φ , c'est-à-dire quand on connaît le courant.

$4\pi h$ est fini, car il n'y a plus de terme en $\frac{1}{\rho}$ ou $\log \frac{1}{\rho}$. Dans l'expression complète, il y aurait des termes en ρ, ρ^2, \dots qui disparaîtraient pour $\rho = 0$.
Donc, $4\pi h$ est fini et est une fonction connue de z et t .

Cas général. — φ est d'une forme quelconque. Reprenons l'expression de Π , nous en déduisons les éléments du champ.

Nous écrirons

$$\Pi = \Phi(t, z) \int \frac{d\beta}{r} + \int \frac{\Phi(t-r, \beta) - \Phi(t, z)}{r} d\beta.$$

Cette expression est identique à l'expression précédente : $\Phi(t, z)$ est sorti du signe \int , car il ne dépend pas de β .

La deuxième \int est finie pour $\varphi = 0$; le dénominateur peut s'annuler pour $\beta = z$ et alors $r = 0$, mais le numérateur s'annule aussi; l'intégrale reste donc finie.

Calculons $\int \frac{d\beta}{r}$.

$$\int \frac{d\beta}{r} = \int \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta-z)^2 + \rho^2}} = \log(\beta - z + r).$$

Passant aux limites, on trouve

$$\log \frac{l-z+r_1}{r_0-z} = \log \frac{(l-z+r_1)(r_0+z)}{\rho^2} = \log \frac{4z(l-z)}{\rho^2}.$$

Pour le point milieu de l'antenne ($z = \frac{l}{2}$) on aurait

$$\log \frac{l^2}{\rho^2}.$$

La différence entre ces deux expressions est

$$\log \frac{4z(l-z)}{l^2},$$

qui est de l'ordre de la deuxième intégrale que nous négligeons devant la première.

Nous obtenons donc avec la même approximation.

$$\Pi = \Phi \log \frac{l^2}{\rho^2} = -2\Phi \log \frac{\rho}{l},$$

d'où

$$H = -2\varphi \log \frac{\rho}{l} \quad \left(\frac{d\Phi}{dt} = \varphi \right).$$

Champ magnétique.

C'est

$$\frac{d^2 \Pi}{d\rho dt} = -\frac{2\varphi}{\rho}.$$

Champ électrique.

La composante perpendiculaire à Oz est au facteur 4π près $\frac{d^2 \Pi}{d\rho dz} = -2 \frac{d\Phi}{dz} \frac{1}{\rho}$; φ étant le courant au point Q à l'instant t , $\frac{d\Phi}{d\beta} d\beta$ est la quantité d'électricité contenue sur l'élément $d\beta$ du fil, et $\frac{d\Phi}{dz}$ est la densité linéaire de l'électricité dans le voisinage de Q .

Des expressions précédentes, il résulte que les deux champs magnétique et électrique (ce dernier dans un plan perpendiculaire à Oz) sont proportionnels à $\frac{i}{\rho}$.

Calculons $4\pi h$.

$$4\pi h = \frac{d^2 \Pi}{dz^2} - \frac{d^2 \Pi}{dt^2} = -2 \log \frac{\rho}{l} \left(\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} \right),$$

car $\frac{\rho}{l}$ ne dépend pas de z et t .

Cette composante du champ est proportionnelle à $\log \rho$. Dans ce calcul, nous poussons l'approximation moins loin que dans le cas particulier envisagé d'abord; car nous négligeons devant $\log \frac{l}{\rho}$.

Cas d'une antenne cylindrique.

Au lieu de supposer l'antenne réduite à son axe, supposons-la cylindrique et soit ρ le rayon (fig. 5).

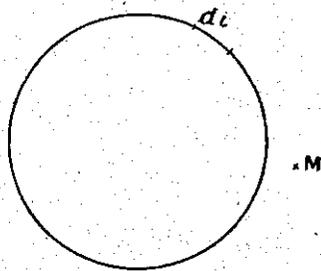


Fig. 5.

Les mêmes formules sont applicables dans ce cas.

A l'approximation où nous sommes, tout le courant peut être considéré comme concentré sur l'axe.

Nous avons en effet des termes de la forme

$$C i^2 \times \log \rho,$$

Ceci est un potentiel logarithmique. Nous aurons à prendre un élément de section de l'antenne, nous considérerons le courant traversant cet élément et la fonction Φ correspondante. On peut regarder Φ comme uniformément réparti sur la surface. Dans ce cas, si la section est circulaire, tout se passe pour le potentiel logarithmique comme si la masse attirante était concentrée au centre.

Il en est de même pour les termes en $\frac{i}{\rho}$ (qui doivent ici s'ajouter géométriquement et non algébriquement). Ce sont des attractions qui s'exercent en raison inverse de la distance, c'est-à-dire d'après la loi du potentiel logarithmique et dans le cas d'une section circulaire, la résultante est la même que si la masse est concentrée au centre.

Dans l'expression de $4\pi h$ il y a un terme indépendant de ρ . Soit di le courant traversant l'élément figuré de la section. Le terme correspondant dans l'expression de $4\pi h$ est proportionnel à $di \times F(z, t)$ où F est connu.

L'intégration donne $\int di \times F(z, t) = i F(z, t)$, i étant le courant traversant toute la section; tout se passe donc encore comme si i était concentré sur l'axe du conducteur.

Courant dans l'antenne. — Prenons pour Φ

une première valeur approchée $\Phi = \Phi_0$. Cette première valeur s'obtiendra en supposant l'amortissement nul; c'est-à-dire en supposant un courant qui se propage le long des fils sans s'affaiblir, mais en subissant une série de réflexions en arrivant aux extrémités.

On a ainsi:

$$\Phi_0 = A \cos \frac{\pi z}{l} \cos \frac{\pi t}{l}.$$

C'est ce qui arriverait si ρ était infiniment petit. Dans ces cas, Φ_0 est bien de la forme

$$f(t - z) + f_1(t + z),$$

et nous pouvons appliquer les formules du premier cas particulier. A l'aide de Φ_0 , nous pouvons calculer comme précédemment $4\pi h$ en fonction de z et t ; nous obtenons ainsi une expression approchée $4\pi h_0$. Poussons maintenant l'approximation plus loin.

La véritable valeur de Φ est $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$ ou $\delta\Phi$ est une correction trop petite. Nous pourrions donc, dans le calcul de $\delta\Phi$, négliger $\frac{1}{\rho}$ devant $\log \frac{1}{\rho}$ et appliquer les formules du cas général.

De même $h = h_0 + \delta h$.

Comme conditions à la limite: sur la surface du conducteur les lignes de force électrique aboutissent normalement; donc, pour $\rho = \rho_0$, nous aurons $h = 0$, c'est-à-dire $h_0 + \delta h = 0$.

Pour calculer δh , nous nous servons de la formule approchée:

$$4\pi\delta h = -2 \log \frac{\rho}{l} \left(\frac{d^2 \delta\Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \delta\Phi}{dt^2} \right). \quad (1)$$

Ecrivant que $h = 0$ pour $\rho = \rho_0$, c'est-à-dire $\delta h = -h_0$, il vient

$$h_0 = 2 \log \frac{\rho_0}{l} \left(\frac{d^2 \delta\Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \delta\Phi}{dt^2} \right);$$

h_0 est une fonction connue de z et t ; ceci nous donne $\delta\Phi$, c'est-à-dire la correction à apporter à la valeur approchée Φ_0 pour le calcul du courant.

Comme condition aux limites, la correction $\frac{d\delta\Phi}{dt}$ doit s'annuler aux extrémités O et A.

D'après cette équation, le courant, tout en se propageant, s'affaiblit; c'est à cet affaiblissement qu'est dû l'amortissement.

Cet amortissement sera d'autant plus faible que $\delta\Phi$ sera plus petit, c'est-à-dire que $\log \frac{\rho_0}{l}$ sera plus grand, ou encore ρ_0 plus petit. Donc l'amortissement varie sensiblement en raison inverse de $\log \frac{\rho_0}{l}$.

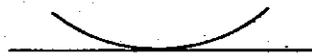


Fig. 6.

Antenne curviligne (fig. 6). — On peut faire une analyse semblable à la précédente. On peut rectifier l'antenne en la remplaçant par une antenne rectiligne tangente et considérer la différence des deux champs. Ce serait une quantité finie calculable dès qu'on connaît la forme de l'antenne curviligne. Il suffirait, dans le calcul de cette quantité finie, de prendre le courant en première

approximation, c'est-à-dire sans amortissement. Ici encore, par conséquent, h_0 peut être considéré comme une fonction connue de s et t , s étant l'arc.

Pour avoir $\delta\Phi$, nous appliquerons les mêmes formules.

Nous aurons donc

$$4\pi h_0 = 2 \log \frac{\rho_0}{\gamma} \left(- \frac{d^2 \delta\Phi}{dt^2} \right).$$

(Les termes de cette formule étant très grands, je néglige la différence entre l'antenne rectiligne et curviligne qui est finie et je puis remplacer au dénominateur dz par ds .)

REMARQUE. — $4\pi h_0$ peut avoir, dans certains cas, des valeurs considérables. Supposons l'antenne enroulée suivant une sorte d'hélice; h_0 aura une valeur notablement différente de celle de l'antenne rectiligne.

Emission indirecte. — Tout ce que nous venons de voir s'applique à l'émission directe. Voyons ce qui se passe dans le cas de l'émission indirecte. L'étincelle éclate dans un circuit primaire qui comporte un condensateur et un transformateur à accouplement très lâche. L'antenne est reliée directement au sol.

Si le primaire est seul, on peut considérer l'amortissement comme nul; nous l'avons déjà vu.

L'antenne, au contraire, si elle était seule, aurait un amortissement notable.

Qu'arrivera-t-il de la réunion des deux? L'étincelle éclate, l'énergie se dégage dans le primaire et de là est transmise au secondaire qui la

rayonne, mais au fur et à mesure qu'elle lui est fournie, c'est-à-dire beaucoup moins vite que si elle lui était fournie directement en bloc. L'amor-

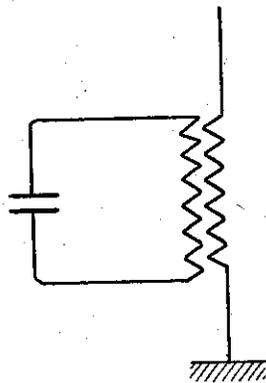


Fig. 7.

tissement semble donc d'autant plus petit que l'accouplement est plus lâche. Il n'en est pas exactement ainsi, car l'amortissement du primaire n'est pas nul; l'énergie rayonnée sous forme de chaleur Joule n'est pas négligeable. Il ne faut donc pas aller trop loin et avoir un accouplement trop lâche, il ne passerait plus rien.

Traisons la question par le calcul. Considérons le secondaire seul: soit y la charge à l'extrémité de l'antenne, nous aurons une équation de la forme

$$Ly'' + Ry' + Hy = 0,$$

où L est la self, H l'inverse de la capacité et R est un coefficient tenant compte de l'amortissement: résistance, rayonnement etc...

Pour le primaire, si x est la charge du condensateur, nous aurons une équation semblable; nous négligerons l'amortissement en raison de sa petitesse

$$L_1 x'' + H_1 x = 0.$$

Si nous tenons compte de l'induction mutuelle, il faut modifier nos équations; nous aurons

$$L y'' + R y' + H y + M x'' = 0$$

$$L_1 x'' + H_1 x + M y'' = 0.$$

Posons

$$x = A e^{\omega t} \quad y = B e^{\omega t},$$

d'où

$$B[L\omega^2 + R\omega + H] + AM\omega^2 = 0,$$

$$A[L_1\omega^2 + H_1] + BM\omega^2 = 0.$$

Eliminons A et B, d'où une équation qui nous donnera ω

$$(L\omega^2 + R\omega + H)(L_1\omega^2 + H_1) - M^2\omega^4 = 0.$$

En général, on accorde le primaire avec le secondaire, d'où

$$\frac{L}{H} = \frac{L_1}{H_1}.$$

Choisissons l'unité de temps telle que si le primaire était seul on ait $\omega = i$; on aurait $L_1 = H_1$, d'où $L = H$.

Posant $\frac{R}{L} = \rho$; $\frac{M^2}{LL_1} = \mu^2$ coefficient de disper-

sion — (Généralement μ est faible, même dans l'accouplement serré) il vient

$$(\omega^2 + \rho\omega + 1)(\omega^2 + 1) - \mu^2\omega^4 = 0.$$

Supposons ρ et μ très faibles.

Posons $\omega = i + \xi$; comme ξ est petit, nous posons

$$\omega^2 + 1 = 2i\xi,$$

d'où

$$(\omega^2 + 1)^2 = -4\xi^2.$$

Il vient alors

$$-4\xi^2 - 2\rho\xi - \mu^2 = 0,$$

et

$$\xi = \frac{-\rho}{4} \pm \frac{\sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{4}.$$

Généralement on a des racines réelles

$$\rho^2 - 4\mu^2 > 0.$$

Supposons les deux circuits indépendants: $\mu = 0$.

L'amortissement propre de l'antenne est alors

$-\frac{\rho}{2}$ celui du primaire 0. Si μ n'est pas nul, il y

a deux racines correspondant à deux vibrations propres indépendantes l'une de l'autre. Elles ont même période (car les deux systèmes sont accordés), mais les deux amortissements sont les racines de l'équation.

Les deux racines sont négatives, l'une est

$$> -\frac{\rho}{4} \text{ l'autre } < -\frac{\rho}{4}.$$

Elles sont toutes les deux $< \frac{\rho}{2}$ en valeur absolue.

L'amortissement est donc moindre dans ces deux vibrations que dans le cas de l'antenne isolée, c'est-à-dire de l'émission directe.

La vibration qui subsistera le plus longtemps correspondra à l'amortissement moindre. Si $\rho = 2 \mu$, l'amortissement est moitié de celui de l'émission directe, car les deux racines sont égales

$$\text{à } -\frac{\rho}{4}.$$



Fig. 8.

Voisinage d'un conducteur. — Supposons l'antenne devant la tour Eiffel, par exemple. Remplaçons cette tour pour un instant par un plan vertical indéfini. Le rayonnement serait nul, car tout se passerait comme si cette muraille était supprimée, et l'antenne remplacée par l'antenne elle-même et son image par rapport au plan, nous aurions deux courants égaux et de signe contraire et tout se passerait comme si le rayonnement était nul.

Si le conducteur auxiliaire se réduit à un fil de faible diamètre, l'effet est beaucoup moindre,

même si le fil est de même longueur que l'antenne, c'est-à-dire accordé avec elle. S'il est désaccordé, l'effet est moindre encore, l'énergie rayonnée est presque la même que si le conducteur auxiliaire n'existait pas. Quant à la tour Eiffel, elle se comporte comme un fil désaccordé avec l'antenne, car sa largeur est très petite par rapport à la longueur d'onde.

TRANSMISSION DES ONDES. DIFFRACTION.

L'expérience a montré que les ondes hertziennes contournent les obstacles. Ce fait semble explicable par la théorie ordinaire de la diffraction, tant qu'il s'agit d'obstacles petits relativement à la longueur d'onde. Les phénomènes de diffraction sont, en effet, d'autant plus importants que la longueur d'onde est plus grande. En admettant qu'il y ait proportionnalité, une montagne de 3 000^m serait, pour une longueur d'onde de 300^m, ce que serait à la lumière un obstacle de

$\frac{1}{200}$ millimètre. Mais la théorie ordinaire de la diffraction rend-elle encore compte des faits quand il s'agit d'obstacles très importants, tels que celui formé par la courbure de la terre?

On a proposé, pour expliquer les faits, différentes hypothèses. Dans l'une d'entre elles, les ondes se propageraient par réflexions successives respectivement sur la surface de la terre et sur les couches supérieures de l'atmosphère où l'air, très raréfié, est conducteur.

Mais avant d'admettre une telle hypothèse, il convient d'examiner si la théorie de la diffraction rend compte des faits.

Soit A O B, la coupe du globe terrestre, O C,

l'antenne qui émet les ondes. Soit I l'intensité d'émission dans un angle DOF , formé par deux

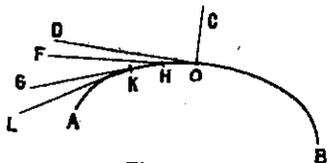


Fig. 9.

tangentes à la terre. S'il n'y avait pas de diffraction il n'y aurait aucune émission dans l'angle FHG égal à l'angle DOF et tel que HG soit tangent à la section AOB . Mais, par suite du phénomène de diffraction, l'intensité d'émission est une certaine fraction de l'intensité I dans l'angle DOF ; soit α cette fraction. Dans l'angle GKL égal à FHG et tel que KL soit tangent à la section AOB , l'intensité d'émission est la même fraction α de l'intensité dans l'angle FGH . L'intensité dans l'angle GKL est donc α^2 . Et ainsi de suite. On voit ainsi que, approximativement, l'intensité d'émission décroît suivant une loi exponentielle quand on se déplace sur la surface de la terre. Il s'agit de se rendre compte de la grandeur du coefficient α .

I. — CAS DES ONDES NON AMORTIES.

Méthode. — Etudions le champ dans le voisinage d'une sphère.

Nous prendrons un système de coordonnées orthogonales u, v, w . Un arc ds infiniment petit sera exprimé par

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$

U, V, W , étant des fonctions de u, v, w .

Soient :

$\alpha' \beta' \gamma'$ les composantes de la force magnétique.

$F' G' H'$ les composantes du potentiel vecteur.

$f' g' h'$ les composantes du déplacement électrique.

Toutes ces composantes étant prises perpendiculairement aux trois surfaces $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$ $w = \text{const.}$

Posons de plus

$$\alpha'' = \frac{\alpha'}{U} \quad \beta'' = \frac{\beta'}{V} \quad \gamma'' = \frac{\gamma'}{W}$$

$$F'' = \frac{F'}{U} \quad G'' = \frac{G'}{V} \quad H'' = \frac{H'}{W}$$

$$f'' = \frac{f'}{U} \quad g'' = \frac{g'}{V} \quad h'' = \frac{h'}{W}$$

Pour simplifier l'écriture, nous nous servirons uniquement, dans ce qui suit, des termes $\alpha'' \beta'' \gamma''$, $F'' G'' H''$, $f'' g'' h''$, et nous supprimerons les accents. Il ne saurait y avoir d'ambiguïté.

Posons

$$A = \frac{U}{VW} \quad B = \frac{V}{WU} \quad C = \frac{W}{UV}$$

Les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$I \left\{ \begin{array}{l} A\alpha = \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial w} \\ B\beta = \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial H}{\partial u} \\ C\gamma = \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \end{array} \right.$$

et

$$\text{II} \begin{cases} 4\pi A \frac{df}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ 4\pi B \frac{dg}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \frac{\partial \gamma}{\partial u} \\ 4\pi C \frac{dh}{dt} = \frac{\partial \beta}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \end{cases}$$

Dans ces dernières équations, nous n'avons pas introduit le courant de conduction qui est nul puisque nous nous supposons dans un diélectrique.

Enfin, nous avons :

$$\text{III} \begin{cases} 4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ 4\pi g = -\frac{dG}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ 4\pi h = -\frac{dH}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial w} \end{cases}$$

Prenons, comme coordonnées, les coordonnées polaires, l'antenne étant prise comme axe des z

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} u = r \\ v = \theta \\ w = \varphi \end{cases}$$

Alors

$$U = 1 \quad V = \frac{1}{r} \quad W = \frac{1}{r \sin \theta}$$

$$A = r^2 \sin \theta \quad B = \sin \theta \quad C = \frac{1}{\sin \theta}$$

L'antenne étant prise comme axe des z , le champ est de révolution. Alors toutes les quantités sont indépendantes de φ .

Choisissons le potentiel vecteur de telle façon que

$$G = H = 0$$

Alors

$$\alpha = 0$$

et comme $\frac{d}{d\varphi} = 0$,

$$\beta = 0$$

$$\frac{\gamma}{\sin \theta} = -\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

Les équations III montrent que $h = 0$, donc la force électrique est dans le plan méridien.

Les équations II se réduisent alors à

$$\frac{df}{dt} 4\pi r^2 \sin \theta = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -\cos \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$4\pi \sin \theta \frac{dg}{dt} = -\sin \theta \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}$$

Et les équations III deviennent

$$\begin{cases} 4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ 4\pi g = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{cases}$$

En comparant les deux valeurs de g , il vient

$$-\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial r}$$

Enfin en comparant les deux valeurs de f et en tenant compte de la dernière relation, nous obtenons l'équation différentielle de F .

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1)$$

On peut satisfaire à cette équation par une solution de la forme.

$$F = e^{\omega t} \times \text{fonct}(r) \times \text{fonct}(\theta). \quad (2)$$

La condition aux limites est que, sur la surface de la sphère ($r = r_0$, en appelant r_0 le rayon de la sphère), les lignes de force électrique aboutissent normalement à la sphère. Donc, à la surface de la sphère

$$\text{donc} \quad g = 0$$

$$\frac{dg}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} = 0.$$

Mais si

$$F = e^{\omega t} R \cdot \Theta,$$

R étant une fonction de R seul et Θ une fonction de θ seul

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} = e^{\omega t} R' \cdot \Theta',$$

R et Θ étant les dérivées de R et Θ respecti-

vement par rapport à r et θ et la condition

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} = 0$$

revient à $R' = 0$ ou

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

La condition à la limite revient donc à

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \text{ pour } r = r_0.$$

L'équation (1) est équivalente aux deux équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left(\frac{K^2}{r^2} - \omega^2 \right) F &= 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - K^2 F &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Car l'élimination de K entre ces deux équations, reproduit l'équation (1).

Les équations (3) peuvent s'intégrer. Dans le cas où $K = -n(n+1)$ l'équation en θ admet une solution simple; c'est un polynôme de Legendre en $\cos \theta$. On intégrerait ensuite l'équation en r de façon à satisfaire aux conditions à la limite et l'on aurait les vibrations propres de la sphère.

Dans le cas général, c'est ω qui est donné, et il faut choisir K de façon à satisfaire à la condi-

tion à la limite. On verrait ainsi que K est de l'ordre de $r_0 \omega$ et par conséquent très grand car, la longueur d'onde étant petite par rapport au rayon de la terre, ω est très grand.

Cotg θ étant fini et K très grand, la solution de l'équation en θ se comportera comme une exponentielle

$$F = e^{\lambda \theta}$$

et nous pouvons facilement nous rendre compte de la grandeur de l'exposant λ . En effet, avec cette hypothèse

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \lambda^2 F,$$

$$\cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} = \lambda F \cotg \theta$$

et l'équation en θ se réduit à

$$\lambda^2 F + \lambda \cotg \theta F - K^2 F = 0.$$

Mais $\lambda \cotg \theta$ est très petit par rapport à λ^2 . Je le néglige. Il vient alors

$$\lambda^2 = K^2$$

Cette valeur de K qui est grande, donne une idée de la grandeur du coefficient de décrement dû à la diffraction.

Mais nous n'avons ici qu'une approximation assez grossière. Car dans ce problème général, la fonction F n'est pas de la forme $e^{\omega t}$ fonct. (r), fonct. (θ).

NATURE DE L'EXPOSANT K .

Si K était réel et négatif, l'intensité décroîtrait rapidement.

Si K était purement imaginaire, il n'y aurait pas de décroissance.

Dans le problème que nous traitons, K sera de l'ordre de ω et on pourra écrire

$$e^{\lambda \theta} = e^{K \theta} = e^{(\mu + i\nu)\theta}.$$

ν étant de l'ordre de ω et μ de celui de $\omega^{\frac{1}{2}}$; μ étant ainsi beaucoup plus petit que ν , la décroissance sera moins rapide qu'il ne semble d'abord.

2° *Problème analogue.* — Soit un cylindre à section droite circulaire de rayon r , dont l'axe est parallèle à Oz . Coupons par un plan perpendiculaire à Oz . D'un point A de ce plan, je mène une tangente AB à la section droite. Soit C le point d'émission des ondes. Je pose :

$$\begin{cases} AC = \rho \\ \text{arc } BC = \theta. \end{cases}$$

Et je prends comme coordonnées

$$z = \theta \quad r = \rho + \theta.$$

Nous aurons :

$$ds^2 = dr^2 + (r - \theta)^2 d\theta^2 + dz^2,$$

A, B, C , ayant les mêmes significations que plus haut, on trouve :

$$A = C = r - \theta$$

$$B = \frac{r}{r - \theta}.$$

Le champ est le même tout le long du cylindre.
Donc :

$$f = g = 0,$$

$$\gamma = 0, \quad F = G = 0.$$

L'équation différentielle qui donne H s'obtient alors :

$$-\rho \frac{d^2 H}{dt^2} + \rho \frac{d^2 H}{d\rho^2} + \frac{dH}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 H}{d\theta^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d^2 H}{d\rho d\theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{dH}{d\theta} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 H}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dH}{d\rho} = 0. \quad (4)$$

La condition à la limite est que :

$$H = 0 \text{ pour } \rho = 0 \quad (r = 1)$$

Je cherche à y satisfaire en prenant

$$H = e^{\omega t} \cdot e^{\lambda \theta} \text{ fonct. } (\rho). \quad (5)$$

Soient H' et H'' les dérivées première et seconde de H par rapport à ρ . En portant la valeur (5) de H dans l'équation (4) il vient

$$H''(\rho^2 + \rho) + H'(\rho^2 - 2\lambda\rho - 1) + H(-\rho^2\omega^2 + \lambda^2\rho + \lambda) = 0$$

ω est donné, puisque nous connaissons la longueur d'onde. De plus, nous devons avoir pour $\rho = 0$, $H = 0$.

Or, pour $\rho = 0$ nous avons deux solutions, l'une qui devient infinie, l'autre qui s'annule. C'est cette dernière qui nous convient.

Si ρ devient très grand, nous avons sensiblement (en ne considérant que les termes en ρ^2):

$$H'' - H\omega^2 = 0$$

• D'où pour les exposants deux solutions $+\omega\rho$, $-\omega\rho$; la deuxième seule nous convient car nous devons avoir des ondes qui s'écartent du cylindre, et non des ondes qui s'en rapprochent.

Il faudra ensuite déterminer λ de façon que l'intégrale qui s'annule pour $H = 0$ soit celle qui prend la forme $e^{-\omega\rho}$ pour ρ très grand.

On obtiendrait ainsi des résultats analogues à ceux qu'on pourrait obtenir dans le cas précédent.

II. CAS D'UNE ONDE AMORTIE.

Le déplacement électrique est alors de la forme

$$R(e^{\omega t}).$$

Le signe R ($e^{\omega t}$) signant : partie réelle de $e^{\omega t}$.

$$\omega = -\frac{\sigma}{T} + \frac{2i\pi}{T}.$$

Nous avons maintenant à tenir compte du décreusement et nous verrons que cette circonstance est favorable.

On pourrait être tenté de refaire le calcul précédent en donnant à ω cette valeur complexe. Ceci ne serait pas justifié. Soit en effet F(t) la perturbation. Nous n'avons pas d'une façon continue $F(t) = R(e^{\omega t})$. F(t) n'a cette valeur que pour $t > 0$. Pour $t < 0$, $F(t) = 0$.

Nous aborderons le problème de la façon suivante. Nous pouvons mettre F(t) sous la forme d'une intégrale de Fourier.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda,$$

$F(t)$ est alors décomposé en une infinité d'ondes élémentaires non amorties de période $\frac{2\pi}{\lambda}$.

$$\varphi(\lambda) = C \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

C étant un facteur constant.

$\varphi(\lambda)$ est l'intensité de l'onde élémentaire considérée.

Dans le cas qui nous occupe

$$\begin{cases} F(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ F(t) = e^{\omega t} & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

Alors

$$\varphi(\lambda) = C \int_0^{\infty} e^{(\omega - i\lambda)t} dt = -\frac{C}{\omega - i\lambda}.$$

L'onde amortie est ainsi décomposée en une infinité d'ondes élémentaires non amorties de période $\frac{2\pi}{\lambda}$. Les plus intéressantes de ces ondes sont celles dont la largeur d'onde est très grande ($\lambda = 0$).

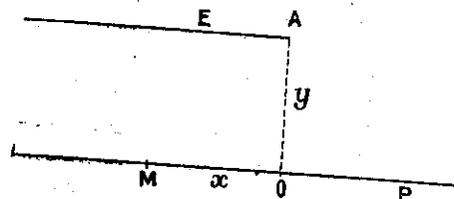


Fig. 10.

L'intensité correspondante est $-\frac{c}{\omega}$; elle n'est pas nulle.

Donc l'assimilation de l'onde amortie à une onde de période T n'est pas justifiée; il faut l'assimiler à un ensemble d'ondes, et parmi les ondes composantes il y en aura de très longues qui ne seront pas sensiblement affaiblies par la diffraction.

Dans le cas de l'ombre du bord d'un écran sur un plan P , la différence ne serait pas grande. Pour un point M de coordonnée x , on trouverait par le calcul qu'une onde $e^{i\lambda t}$ serait affaiblie de façon à devenir $\frac{e^{i\lambda t}}{x\theta(\lambda)}$, ($\theta(\lambda)$ s'annule avec λ).

Et il faudrait remplacer $\varphi(\lambda)$ par $\frac{\varphi(\lambda)}{x\theta(\lambda)}$, de sorte que la lumière diffractée serait sensiblement représentée par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda}{x\theta(\lambda)}.$$

L'affaiblissement est proportionnel à $\frac{1}{x}$, et plus faible que dans le cas de l'onde non amortie.

Dans le cas qui nous occupe, l'affaiblissement pour une onde non amortie suivrait une loi exponentielle et la lumière serait proportionnelle à

$$e^{-\psi(\lambda)\theta},$$

θ étant l'angle que nous avons appelé ainsi quand nous avons adopté les coordonnées polaires. On a alors pour la lumière diffractée,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda t - \theta\psi(\lambda)} d\lambda.$$

Pour θ suffisamment grand, les termes cor-

respondant à λ grand seront faibles; on conservera seulement les termes correspondant à λ petit; l'exposant d'où dépend l'affaiblissement de la lumière sera donc celui qui correspond aux très grandes longueurs d'onde.

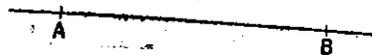


Fig. 11.

Autre méthode d'étude. — On pourrait essayer d'appliquer au cas présent la théorie de Fresnel. Décomposons la surface étudiée AB en plages telles que la différence de marche du rayon d'une plage à la suivante soit d'une demi longueur d'onde. Le raisonnement de Fresnel n'est plus applicable.

D'après ce raisonnement, les effets de deux plages consécutives se détruisent sensiblement puisqu'ils sont sensiblement égaux et de signe contraire.

Dans le cas d'une onde amortie, deux demi-oscillations consécutives ne sont plus de même amplitude, et la compensation ne se fait plus.

RÉCEPTION DES SIGNAUX

Étudions les phénomènes se produisant dans l'antenne réceptrice supposée rectiligne et cylindrique. On la suppose de plus verticale, c'est-à-dire parallèle au plan de l'onde (la distance à l'antenne d'émission étant très grande).

Cherchons le courant qui prend naissance dans l'antenne.

Nous écrirons la condition à la surface de

l'antenne qui est que les lignes de forces électriques lui soient normales.

L'axe de l'antenne étant pris pour oz , la composante suivant oz de la force électrique doit être = 0 aux points situés à la distance ρ_0 de oz (ρ_0 = rayon de la section de l'antenne).

Or, cette force électrique est composée de 2 parties :

1° Une composante due aux ondes hertziennes incidentes ;

2° Une composante due aux courants qui prennent naissance dans l'antenne réceptrice.

1° Les ondes émanées de l'antenne d'émission peuvent être considérées comme planes et la composante h de la force électrique qui leur est due est alors constante le long de l'antenne (parallèle au plan de l'onde) ;

2° Soit $\varphi(t, z)$ la fonction représentant l'intensité du courant dans l'antenne réceptrice.

En posant $\varphi(t, z) = \frac{d\Phi}{dt}$, la force électrique due à ce courant existant à la surface du cylindre, formé par l'antenne, est représentée par l'expression approchée :

$$- 2 \log \frac{\rho_0}{l} \left(\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} \right)$$

(l étant la longueur de l'antenne).

L'équation à la surface est alors :

$$2 \log \frac{\rho_0}{l} \left[\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} \right] = 4 \pi h,$$

équation différentielle qui définit la fonction Φ .

On a vu que h peut être considéré comme indépendant de z , c'est donc une fonction de t seulement.

Supposons le cas d'une onde incidente sinusoïdale de pulsation λ , h sera proportionnel à $\sin \lambda t$, et on aura :

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = A \sin \lambda t,$$

A étant une constante caractérisant l'antenne réceptrice. La solution est de la forme :

$$\Phi = \frac{A}{\lambda^2} \sin \lambda t + F(t-z) + F_1(t+z),$$

d'où :

$$\varphi = \frac{A}{\lambda} \cos \lambda t + F'(t-z) + F'_1(t+z),$$

F et F_1 étant des fonctions déterminées par les conditions aux limites.

On considère pour cela, au lieu de l'antenne réceptrice de longueur l mise à la terre à sa base, une antenne supposée isolée dans l'espace formé par l'antenne réceptrice et sa symétrique, par rapport au plan horizontal $z=0$.

On écrit que le courant est nul aux extrémités $z=+l$ et $z=-l$, d'où les 2 équations.

$$\frac{A}{\lambda} \cos \lambda t + F'(t-l) + F'_1(t+l) = 0,$$

$$\frac{A}{\lambda} \cos \lambda t + F'(t+l) + F'_1(t-l) = 0.$$

On peut y satisfaire en prenant $F' = F'_1$.

En posant $F' = F'_1 = B \cos \lambda t$, on doit avoir :

$$2B \cos \lambda t \cos \lambda l + \frac{A}{\lambda} \cos \lambda t = 0,$$

d'où

$$B = -\frac{A}{2\lambda \cos \lambda l}$$

et

$$\varphi = \frac{A}{\lambda} \cos \lambda t \left[1 - \frac{\cos \lambda z}{\cos \lambda l} \right].$$

On a ainsi une solution particulière pour φ , mais la solution la plus générale est :

$$\varphi = \frac{A}{\lambda} \cos \lambda t \left[1 - \frac{\cos \lambda z}{\cos \lambda l} \right] + \sum B_m \frac{\cos \frac{m\pi t}{2l}}{\sin \frac{m\pi t}{2l}} \cos \frac{m\pi z}{2l}$$

les indices m étant impairs).

La série des termes ajoutés équivaut en effet à fonc. $(t+z)$ + fonc. $(t-z)$.

Les coefficients B_m seront déterminés par les conditions

$$\varphi = 0 \text{ et } \frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ pour } t = 0.$$

On satisfera à $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ en prenant seulement les cosinus et la condition $\varphi = 0$ donne :

$$0 = \frac{A}{\lambda} \left[1 - \frac{\cos \lambda z}{\cos \lambda l} \right] + \sum B_m \cos \frac{m\pi z}{2l}.$$

Il suffit de développer $\frac{A}{\lambda} \left[1 - \frac{\cos \lambda z}{\cos \lambda l} \right]$ en série

de Fourier pour avoir par identification les valeurs des coefficients B_m .

Au lieu de supposer h proportionnel à $\sin \lambda t$ supposons-le maintenant proportionnel à $e^{\lambda t}$.

L'équation déterminant Φ sera :

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = A e^{\lambda t}$$

et une analyse toute semblable à la précédente donnerait :

$$\varphi = \frac{A}{\lambda} e^{\lambda t} \left[-1 + \frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}} \right] + \sum B_m \cos \frac{m\pi t}{2l} \cos \frac{m\pi z}{2l}$$

(les indices m étant impairs pour que les termes en B_m s'annulent pour $z = \pm l$).

Les B_m se déterminent encore par les conditions $\varphi = 0$ et $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ pour $t = 0$.

En pratique on peut admettre qu'on a une vibration sinusoïdale amortie et h est alors proportionnel à la partie réelle de $e^{\omega t}$ où ω est complexe.

On obtiendra alors φ en prenant la partie réelle de l'expression précédente où on fera $\lambda = \omega$.

Mais on n'obtient ainsi qu'une première approximation. Nous n'avons tenu compte en effet que du premier terme $2 \log \frac{l_0}{l} \left[\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} \right]$ dans le développement de la composante de la force électrique due au courant dans l'antenne réceptrice, $\frac{\rho_0}{\gamma}$ ayant été supposé très petit, ce terme qui

contient $\log \frac{\rho_0}{\gamma}$ est très grand. Mais dans une deuxième approximation il faudrait introduire le terme suivant qui a une valeur finie. On se servirait de la valeur approchée obtenue en première approximation pour calculer ce terme correctif.

Cependant on peut se contenter de l'analyse approchée qui précède à la condition suivante :

On remarque que les termes $\cos \frac{m\pi t}{2l} \cos \frac{m\pi z}{2l}$ représentent les vibrations propres de l'antenne.

Les vibrations propres ainsi obtenues sont des vibrations non amorties, car le calcul précédent a été conduit en considérant ρ_0 comme nul, cas limite correspondant à des vibrations propres non amorties. Mais, en réalité, on doit tenir compte de l'existence d'un amortissement et il suffira pour cela d'introduire un facteur de la forme $e^{-\alpha t}$ où α est > 0 . On écrira donc :

$$\varphi = \frac{A}{\lambda} e^{\lambda t} \left[-1 + \frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}} \right] + \sum B_m e^{-\alpha t} \frac{\cos \frac{m\pi t}{2l} \cos \frac{m\pi z}{2l}}{\sin \frac{m\pi t}{2l}}$$

α étant l'amortissement propre de l'antenne réceptrice.

REMARQUES

I. — On voit la nécessité d'employer une antenne réceptrice rectiligne et parallèle au plan de l'onde incidente.

En effet, l'intensité du courant dans l'antenne dépendant de $4\pi h$, on a intérêt à ce que la composante h de la force électrique parallèle à l'antenne soit maxima. Or, dans le cas d'une antenne

oblique par rapport aux plans de l'onde, la valeur de h devrait être multipliée par le cosinus de l'obliquité.

Si l'antenne était curviligne, on aurait l'équation analogue :

$$2 \log \frac{\rho_0}{l} \left[\frac{d^2 \Phi}{ds^2} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} \right] = 4 \pi Z,$$

ds étant l'élément d'arc de courbe et Z la composante de la force électrique suivant la tangente à l'antenne.

En supposant la force électrique constante en grandeur et en direction dans la région de l'antenne, $4 \pi Z$ est d'autant plus grand que la direction de l'élément ds se rapproche de celle de la force électrique. De là résulte l'intérêt des antennes rectilignes.

II. — L'énergie incidente est proportionnelle au carré de la force électrique, c'est-à-dire à $e^{2\lambda t}$

En intégrant $\int_0^\infty e^{2\lambda t} dt = -\frac{1}{2\lambda}$, on voit que l'énergie incidente totale est proportionnelle à $\frac{1}{\lambda}$.

De la même façon, on trouve que l'énergie captée, proportionnelle au carré du courant, est proportionnelle à $\frac{1}{\lambda^2}$. Le rendement à la réception

dépendra donc de $\frac{1}{\lambda}$ et sera d'autant plus faible que les ondes seront plus amorties. Un grand amortissement est donc défavorable au rendement ; l'énergie n'a pas le temps de se communiquer à l'antenne.

Dans le cas d'un amortissement très faible, en supposant h proportionnel à $\sin \lambda t$, ce qui est le cas de la première formule, on trouverait que l'énergie est proportionnelle à $\lambda \cos \lambda l$. On a alors intérêt, pour accroître le rendement, à choisir pour λ une valeur telle que $\cos \lambda l$ soit voisin de zéro, c'est-à-dire à accorder les deux antennes.

III. — Influence du rayon ρ_0 de la section de l'antenne réceptrice.

A est proportionnel à $\frac{1}{\log \frac{\rho_0}{l}}$, il en est donc de même du courant i .

L'énergie captée est proportionnelle à $L i^2$ et L proportionnel à $l \log \frac{\rho_0}{l}$.

Donc l'énergie captée est proportionnelle à $\frac{l}{\log \frac{\rho_0}{l}}$.

Elle décroît avec le rayon du fil, mais assez lentement.

Des expériences de M. Tissot ont donné les résultats suivants rapportés à la distance de 1000 mètres.

Antenne de 45^m simple. Énergie captée = 57 ergs. Énergie à l'émission = $1,67 \times 10^7$ ergs.

La quantité d'énergie captée était égale à l'énergie traversant une surface de 55^{m²} parallèle au plan d'onde, c'est-à-dire que l'antenne simple de longueur 45^m paraissait drainer les ondes sur une largeur de $1^m,20 = 330$ fois son diamètre.

Une antenne quadruple captait 320 ergs et paraissait drainer 225^{m²}, soit une largeur de 4^m,50 environ.

THÉORIE DE LA SYNTONIE

Soit x la charge de l'antenne réceptrice, le courant sera x' et sera défini par une équation de la forme :

$$x'' - \alpha x' + \beta x = e^{\omega t} + e^{\omega' t},$$

x'' représente la force de self-induction; $-\alpha x'$ est l'amortissement par rayonnement extérieur; βx est la force électrique due à la capacité de l'antenne.

Le deuxième membre où ω et ω' sont imaginaires conjugués est équivalent à $2 R [e^{\omega' t}]$ et représente la force électrique incidente.

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$x = A e^{\lambda t} + A' e^{\lambda' t}$$

avec

$$\lambda^2 - \alpha \lambda + \beta = 0.$$

Elle correspond aux vibrations propres de l'antenne réceptrice.

Une solution particulière de l'équation où ne figurerait au deuxième membre que le seul terme $e^{\omega t}$ est :

$$\frac{e^{\omega t}}{\omega^2 - \alpha \omega + \beta} = \frac{e^{\omega t}}{(\omega - \lambda)(\omega - \lambda')}.$$

L'équation complète admet donc la solution particulière

$$x = C e^{\omega t} + C' e^{\omega' t},$$

avec

$$C = \frac{1}{(\omega - \lambda)(\omega - \lambda')}$$

$$C' = \frac{1}{(\omega' - \lambda)(\omega' - \lambda')}.$$

C et C' sont donc imaginaires conjugués.

La solution générale cherchée est donc :

$$x = C e^{\omega t} + C' e^{\omega' t} + A e^{\lambda t} + A' e^{\lambda' t},$$

les valeurs des constantes A et A' seront obtenues en écrivant que le système part du repos, c'est-à-dire que $x = x' = 0$ pour $t = 0$.

On a donc pour déterminer A et A' les deux équations :

$$\begin{cases} C + C' + A + A' = 0, \\ C \omega + C' \omega' + A \lambda + A' \lambda' = 0. \end{cases}$$

cherchons à quelles conditions les indications du récepteur seront aussi grandes que possible.

Deux classes de récepteurs sont à envisager :

1° Ceux qui totalisent les effets élémentaires : c'est le cas du *bolomètre* dont l'indication dépend de l'échauffement produit par le courant de l'antenne réceptrice ;

2° Les *cohérences*, dont l'indication dépend de la valeur maxima atteinte par la charge x de l'antenne.

Le détecteur électrolytique paraît être intermédiaire entre ces deux classes.

1° Réception au bolomètre.

L'indication du bolomètre dépend de la quantité

$$\int_0 x'^2 dt$$

x'^2 contient des termes de la forme

$$C^2 \omega^2 e^{2\omega t} \quad \text{et} \quad 2CC' \omega \omega' e^{(\omega + \omega')t},$$

dont l'intégration de 0 à l' ∞ donne :

$$\frac{C^2 \omega^2}{2\omega} = \frac{C^2 \omega}{2} \quad \text{et} \quad 2CC' \frac{\omega \omega'}{\omega + \omega'}.$$

On a donc une expression de forme :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x'^2 dt &= \frac{C^2 \omega}{2} + \frac{C'^2 \omega'}{2} + \frac{A^2 \lambda}{2} + \frac{A'^2 \lambda'}{2} \\ &+ 2CC' \frac{\omega \omega'}{\omega + \omega'} + 2AA' \frac{\lambda \lambda'}{\lambda + \lambda'} \\ &+ 2AC \frac{\omega \lambda}{\omega + \lambda} + 2A'C' \frac{\omega' \lambda'}{\omega' + \lambda'} \\ &+ 2AC' \frac{\omega \lambda'}{\omega + \lambda'} + 2A'C \frac{\omega' \lambda}{\omega' + \lambda}. \end{aligned}$$

Il y aurait lieu de discuter la valeur de l'énergie enregistrée par le bolomètre suivant les différentes valeurs de ω et λ .

Cherchons si nous pouvons avoir syntonie complète, c'est-à-dire si, pour certaines valeurs de ω , λ ou ω' , λ' cette énergie enregistrée peut devenir infinie (de la même façon que pour le cas de résonance d'un diapason l'expression de l'amplitude de vibration devient infinie).

Il faut pour cela que l'un des termes de l'expression précédente devienne ∞ . Il semble qu'il en soit ainsi quand C et C' deviennent infinis, c'est-à-dire pour $\omega = \lambda$, ce qui correspond à une antenne réceptrice identique à l'antenne d'émission (même période et même amortissement).

Pour étudier ce cas posons :

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda + \varepsilon \\ \omega' &= \lambda' + \varepsilon', \end{aligned}$$

ε et ε' étant imaginaires conjugués. On aura

$$C = \frac{1}{\varepsilon(\lambda - \lambda')}.$$

Mais comme ε et ε' sont très petits les équations déterminant A et A' montrent qu'on a sensiblement

$$A = -C \quad \text{et} \quad A' = -C',$$

C et C' étant très grands.

Mais cependant, la deuxième équation écrite sous la forme :

$$(C + A)\lambda + (C' + A')\lambda' + C\varepsilon + C'\varepsilon' = 0$$

montre que, C ε et C' ε' étant des quantités finies, A + C et A' + C' ont des valeurs finies bien que A et C, A' et C' soient infiniment grands.

En faisant alors $\omega = \lambda$ et $\omega' = \lambda'$ dans l'expression de l'énergie enregistrée elle devient

$$(A + C)^2 \frac{\lambda}{2} + (A' + C')^2 \frac{\lambda'}{2} + \frac{2\lambda\lambda'}{\lambda + \lambda'} (A + C)(A' + C').$$

Tous les termes de cette expression restent donc finis et on ne peut avoir de résonance parfaite dans ce cas.

L'expression de l'énergie enregistrée peut encore devenir infinie si le dénominateur de l'un de ses termes s'annule. Or, à cause de l'existence de l'amortissement, les quantités ω , λ , ω' , λ' ont leur

partie réelle négative. Donc pour que l'une des quantités $\omega + \lambda$, $\lambda + \lambda'$, etc... puisse devenir nulle, il faut que la partie réelle des quantités correspondantes ω , λ , ω' ou λ' soit elle-même nulle, c'est-à-dire que l'un des amortissements au moins doit être nul.

Supposons par exemple que l'antenne réceptrice n'ait pas d'amortissement; les parties réelles de λ et λ' seront = 0 et on aura $\lambda + \lambda' = 0$.

On voit alors que dans l'expression

$$x = C e^{\omega t} + C' e^{\omega' t} + A e^{\lambda t} + A' e^{\lambda' t}$$

les deux premiers termes qui sont amortis s'annuleront quand le temps deviendra suffisamment grand alors que, au contraire, les deux derniers, non amortis, subsistent indéfiniment.

Cette vibration propre de l'antenne réceptrice, en se prolongeant indéfiniment, donne une énergie infinie au bolomètre.

Mais le cas ainsi envisagé est purement théorique et illusoire. Une antenne réceptrice sans amortissement ne permettrait pas la transmission de signaux, car ces derniers doivent avoir une courte durée; d'ailleurs la chaleur communiquée au bolomètre se dissiperait par le rayonnement et ne pourrait s'accumuler indéfiniment.

Pour permettre une transmission pratique avec syntonie parfaite, il faudrait en réalité qu'on ait $\omega = \lambda = 0$, c'est-à-dire qu'il faudrait employer des ondes entretenues.

2° Réception au cohéreur.

Le cohéreur enregistre le maximum de x , c'est-à-dire

$$2 \times \max \Re [C e^{\omega t} + A e^{\lambda t}].$$

Examinons si la syntonie existe pour ω très voisin de λ . Posons donc :

$$\omega = \lambda + \varepsilon$$

$$\omega' = \lambda' + \varepsilon.$$

On a :

$$C e^{\omega t} + A e^{\lambda t} = (A + C) e^{\lambda t} + C [e^{\omega t} - e^{\lambda t}],$$

$A + C$ restant fini, comme nous l'avons vu, le terme $(A + C) e^{\lambda t}$ a une valeur finie.

Le deuxième terme est égal à :

$$C e^{\lambda t} (e^{\varepsilon t} - 1)$$

étant très petit, on a très sensiblement

$$e^{\varepsilon t} - 1 = \varepsilon t.$$

Comme $C = \frac{1}{\varepsilon(\lambda - \lambda')}$ la valeur du deuxième terme est :

$$\frac{\varepsilon t \times e^{\lambda t}}{\varepsilon(\lambda - \lambda')} = \frac{t e^{\lambda t}}{\lambda - \lambda'}$$

Comme t est en facteur, on peut croire que ce terme peut croître indéfiniment. Cela serait vrai dans le cas d'un amortissement nul; λ serait alors purement imaginaire, le module de $e^{\lambda t}$ serait égal à 1 et $t e^{\lambda t}$ croîtrait infiniment avec t . On aurait alors une résonance parfaite.

Mais s'il existe un amortissement on a :

$$\lambda = -\alpha + i\beta \quad \text{avec} \quad -\alpha < 0,$$

$$t e^{\lambda t} = t e^{-\alpha t} e^{i\beta t}.$$

Le module de $te^{i\omega t}$ est alors $te^{-\alpha t}$, quantité qui, loin de croître, tend vers zéro quand t croît.

On n'a donc aucune résonance dans ce cas.

En résumé, on voit donc que, dans les deux cas de réception étudiés, la résonance n'est possible qu'avec l'emploi d'ondes entretenues.

TÉLÉGRAPHIE DIRIGÉE. GÉNÉRALITÉS

Le problème de la télégraphie sans fil dirigée se rattache à l'étude du champ magnétique très loin de l'antenne.

Nous avons à ce moment désigné par xyz les coordonnées du point M où on étudie le champ, $\lambda\mu\nu$ les cosinus directeurs de la droite OM (O l'origine), $\xi\eta\zeta$ les coordonnées d'un point P de l'antenne;

r_0 la distance OM;

r la distance PM;

$d\tau$ l'élément de volume de l'antenne en P;

u, v, w les composantes du courant de conduction dans l'antenne.

Rappelons qu'on a trouvé pour le courant de conduction :

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{R}(u_0 e^{i\omega t}), \\ v &= \mathcal{R}(v_0 e^{i\omega t}), \\ w &= \mathcal{R}(w_0 e^{i\omega t}), \end{aligned} \quad (1)$$

pour le potentiel vecteur de Lorenz :

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{R} \int u_0 \frac{e^{i\omega(t-r)}}{r} d\tau, \\ G &= \mathcal{R} \int v_0 \frac{e^{i\omega(t-r)}}{r} d\tau, \\ H &= \mathcal{R} \int w_0 \frac{e^{i\omega(t-r)}}{r} d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Lorsque le point M est très loin, on peut en outre poser

$$r_0 = r + \Sigma \lambda \xi \quad \text{avec} \quad \Sigma \lambda \xi = \lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta. \quad (3)$$

Dans une première approximation on a remplacé les valeurs (2) de FGH par les suivantes, obtenues en remplaçant r par sa valeur tirée de (3) dans les numérateurs et par r_0 dans les dénominateurs.

On a :

$$F = \mathcal{R} \int u_0 \frac{e^{i\omega(t-r_0 + \Sigma \lambda \xi)}}{r_0} d\tau,$$

et des expressions analogues pour G et H, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{R} \left(A \frac{e^{i\omega(t-r_0)}}{r_0} \right), \\ G &= \mathcal{R} \left(B \frac{e^{i\omega(t-r_0)}}{r_0} \right), \\ H &= \mathcal{R} \left(C \frac{e^{i\omega(t-r_0)}}{r_0} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \int u \varepsilon^{i\omega \Sigma \lambda \xi} d\tau, \\ B &= \int v_0 e^{i\omega \Sigma \lambda \xi} d\tau, \\ C &= \int w_0 e^{i\omega \Sigma \lambda \xi} d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Or le champ magnétique se calcule aisément en partant de FGH par les formules

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ \beta &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \gamma &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Il s'agit donc de connaître le vecteur ABC.

Lorsque le point M est très éloigné, on peut considérer l'onde comme plane et normale à OM. Les composantes de ABC normales, à OM suffiront alors pour l'étude des vibrations. On peut ajouter que, ABC étant imaginaire, on aura à la fois l'intensité et la phase de la vibration. Pour faire le calcul, il suffirait de décomposer A, B et C suivant trois directions rectangulaires dont l'une parallèle à OM.

Possibilité de la télégraphie dirigée. — Or, ABC sont des fonctions de $\lambda \nu \mu$ et on peut concevoir que, pour une forme convenable de l'excitateur, le rayonnement soit variable dans les diverses directions. On peut même chercher si on ne pourrait pas déterminer l'excitation par la condition d'obtenir une distribution donnée à l'avance du rayonnement.

Pour nous faire une idée de ce problème, nous allons négliger l'amortissement, c'est-à-dire supposer ω purement imaginaire.

A se présente sous la forme d'une intégrale de Fourier; or une fonction quelconque étant représentable par une intégrale de Fourier, on peut se donner pour A telle fonction que l'on veut, de même pour B et C, de sorte que le problème est possible au point de vue analytique. Cependant, étant donné que l'excitateur est toujours renfermé dans un volume restreint (puisqu'on suppose que M en est très éloigné), on voit que, dès que $\xi \eta \zeta$ deviennent grands, $u_0 \nu_0 w_0$ deviennent nuls, ce qui restreint manifestement la généralité du choix de ABC.

Première solution pratique. — La solution pratique consiste à prendre une série d'antennes

verticales. Alors $u_0 = \nu_0 = 0$ et les formules (4) et (5) montrent que

$$\left. \begin{aligned} A &= 0, \\ B &= 0, \\ C &= \int w_0 e^{i\omega \Sigma \lambda \xi} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (5 \text{ bis})$$

$$\left. \begin{aligned} F &= 0, \\ G &= 0, \\ H &= \mathcal{R} \left(C \frac{e^{i\omega(t-r_0)}}{r_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4 \text{ bis})$$

Etudions alors le rayonnement dans le plan horizontal $\nu = 0$. En outre ξ et η sont constants pour tout point d'une antenne. Donc, pour un point M donné du plan horizontal, C prend la forme

$$C = \Sigma e^{i\omega(\lambda \xi + \mu \eta)} \int w_0 d\tau,$$

le signe \int ne s'appliquant plus qu'à une antenne et le signe Σ portant sur les diverses antennes. En prenant comme unité la section supposée constante et commune des antennes et posant le long d'une antenne,

$$\int w_0 d\xi = W e^{i h},$$

il vient

$$C = \Sigma W e^{i\omega(\lambda \xi + \mu \eta) + i h},$$

C'est bien fonction de λ et de μ , donc le rayonnement variera suivant la direction.

On a cherché, par exemple, à réaliser des antennes formant les trois côtés d'un triangle équi-

latéral. Il faut pour réaliser le système précédent, arriver à produire un décalage donné entre les diverses antennes et on y arrive en réalisant le montage représenté par le schéma ci-contre (fig. 12):

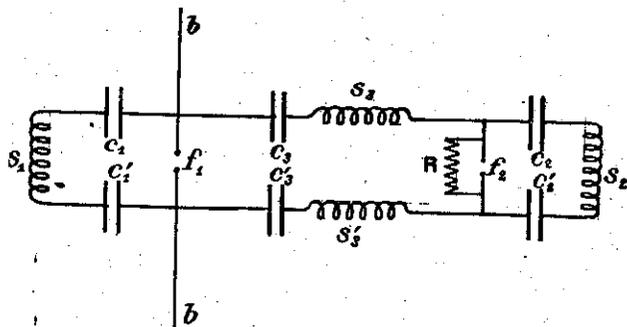


Fig. 12.

b b bornes de la bobine.

Première antenne : f_1 interrupteur à étincelles ; c_1 c_1' condensateurs ; s_1 self.

Deuxième antenne : f_2 interrupteur à étincelles ; c_2 c_2' condensateurs ; s_2 self ; R résistance shuntant f_2 ; s_3 s_3' selfs ; c_3 c_3' condensateurs.

Les diverses phases de fonctionnement sont les suivantes :

D'abord c_1 et c_1' se chargent, c_2 et c_2' aussi, grâce à la résistance R qui shunte l'interrupteur f_2 .

Quand l'étincelle éclate en f_1 , les oscillations prennent naissance dans le circuit de la première antenne (s_1 c_1 f_1 c_1') et dans le circuit auxiliaire (f_1 c_2 s_2 f_2 s_3 c_3'), rien ne passe par la résistance R et il n'y a pas d'étincelles en f_2 , mais alors c_2 et c_2' se chargent et l'étincelle finit par éclater en f_2 , mais avec un retard qu'on peut d'ailleurs régler.

On a ainsi une solution de la télégraphie sans fil dirigée.

Solution de Marconi. — Dans le système Marconi, l'antenne a la forme ci-contre : une partie verticale, une autre horizontale beaucoup plus longue. Dans ce qui suivra nous supposons la terre supprimée et nous la remplacerons par l'image de l'antenne par rapport au sol.

L'expérience montre que le rayonnement est bien plus grand à droite qu'à gauche. Cher-

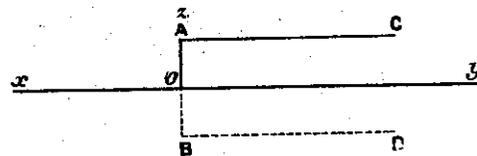


Fig. 13.

chons à nous rendre compte. — Prenons (fig. 13) pour oy la direction de la branche horizontale de l'antenne. Pour un point très loin sur oy l'onde est plane, parallèle au plan $y = 0$.

Ici $u_0 = 0$ sur toute l'antenne, donc $A = 0$ ($F = 0$).

B, dirigé suivant oy , normal au plan de l'onde, n'est pas à considérer dans l'étude de la vibration.

Reste C ; w_0 n'est différent de 0 que sur AB. On ne voit donc pas pourquoi le rayonnement n'est pas le même dans les deux sens.

Mais nous avons fait une approximation en remplaçant les équations (2) par les groupes (4) et (5), approximation qui revenait à remplacer

$$\frac{1}{r_0 - \Sigma \lambda \xi} \text{ par } \frac{1}{r_0}$$

Nous allons voir que c'est cette approximation, ici trop peu précise, qui explique la divergence entre l'expérience et la théorie.

Revenons aux équations (2)

$$F = \alpha \int u_0 \frac{e^{\mu(t-r_0+\Sigma\lambda\xi)}}{r_0 - \Sigma\lambda\xi} d\xi$$

et les valeurs analogues de G et H.

Ici $u_0 = 0$ partout, donc $F = 0$.

Pour calculer G, il suffit de faire l'intégration sur les branches AC et BD, car $v_s = 0$ sur HB. On a alors $\xi = 0$; $\zeta = \text{const.}$

$$G = \alpha \int v_0 \frac{e^{\mu[t+\mu\eta-(r_0-\nu\zeta)]}}{-\mu\eta + (r_0 - \nu\zeta)} d\tau,$$

or l'intégrale se divise en deux parties, l'une relative à AC, l'autre à BD. Remplaçons dans chaque branche l'intensité par sa valeur moyenne, elle est de signe contraire dans les deux branches. En outre la constante ζ a des valeurs égales et de signes contraires sur les deux branches. Tout le reste est identique, donc, si nous désignons par $f(r_0 + \nu\zeta)$, la partie de l'intégrale relative à AC, celle relative à BD sera $-f(r_0 + \nu\zeta)$ et on aura

$$G = f(r_0 - \nu\zeta) - f(r_0 + \nu\zeta).$$

H se calcule de même sur HB seul et se réduit à

$$H = \alpha \int w_0 \frac{e^{\mu(t+\nu\zeta-r_0)}}{t + \nu\zeta - r_0} d\tau,$$

puisque sur cette branche $\xi = \eta = 0$. D'ailleurs au

milieu de AB on aura $\zeta = 0$. C'est une fonction de la constante r_0 , soit $H = \psi(r_0)$.

Pour avoir maintenant le champ magnétique, nous allons appliquer les équations (6)

$$\alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\alpha = \psi'(r_0) \frac{dr_0}{dy} - f'(r_0 - \nu\zeta) \frac{d(r_0 - \nu\zeta)}{dz} + f'(r_0 + \nu\zeta) \frac{d(r_0 + \nu\zeta)}{dz}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r_0 - \nu\zeta)}{\partial z} &= \frac{\partial\left(r_0 - \frac{\zeta z}{r_0}\right)}{\partial z} \text{ à cause de } z = \nu r_0 \\ &= \frac{z}{r_0} - \frac{\zeta}{r_0} + z\zeta \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_0}. \end{aligned}$$

Comme on est dans le plan $z = 0$, cela se réduit à

$-\frac{\zeta}{r_0}$ et on a

$$\alpha = \psi'(r_0) \frac{y}{r_0} + \frac{\zeta}{r_0} [f'(r_0 - \nu\zeta) + f'(r_0 + \nu\zeta)];$$

sur oy même : $\nu = 0$

$$\alpha = \psi'(r_0) \frac{y}{r_0} + 2 \frac{\zeta}{r_0} f'(r_0);$$

on voit que α varie suivant que y , pour la même valeur absolue, est positif ou négatif, ce qui est conforme à l'expérience; β ne nous préoccupe pas puisqu'il est dirigé suivant $o\eta$, il se réduit d'ail-

leurs à $\frac{-dH}{dx} = -\psi'(r_0) \frac{x}{r_0}$; γ se réduit à $\frac{dG}{dx}$ qui est nul; β est nul aussi sur oy .

Si on remplace les diverses variables par leurs valeurs moyennes dans G et H pour avoir une valeur approchée de ces intégrales, c'est-à-dire des fonctions ψ et f , on voit que, sur $o\eta$, le rayonnement a la forme

$$\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \text{ d'un côté,}$$

$$\frac{A}{r} - \frac{B'}{r^2} \text{ de l'autre,}$$

le rapport tend vers 1 quand r augmente indéfiniment, c'est-à-dire quand on se rapproche des conditions où notre première approximation était valable.

Le système Marconi donne donc bien la télégraphie dirigée, mais d'autant plus mal dirigée qu'on télégraphie plus loin.

Oscillations entretenues. Equations générales.
— Considérons (fig. 14) un circuit comprenant une

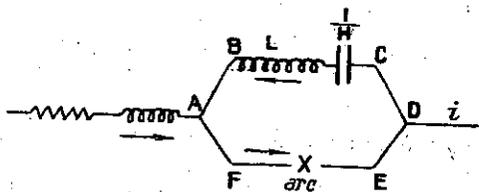


Fig. 14.

source de force électromotrice constante continue E, une résistance et une self, et, en parallèle, d'une part un arc, de l'autre une self et une capacité.

Soit $\frac{1}{H}$ la capacité du condensateur;

L la self mise en série avec lui;
 x la charge du condensateur;
 i le courant circulant dans le circuit extérieur.
Le courant circulant dans la branche du condensateur est

$$x' = \frac{dx}{dt}.$$

Le courant circulant dans l'arc est

$$i + x'$$

compté dans le sens de la flèche, x' étant supposé circuler dans le sens de la flèche et i mesuré dans le sens de la flèche.

Dans le circuit ABCDEF fermé, on a alors

$$Lx'' + \rho x' + \varphi(i + x') + Hx = 0, \quad (1)$$

$\rho x'$ étant un terme qui correspond à la résistance de la self L et aux autres causes possibles d'amortissement, y compris le rayonnement d'énergie par l'antenne, $\varphi(i + x')$ le terme dû à l'arc.

Dans le circuit AFED, on a de même (en négligeant la self extérieure)

$$Ri + \varphi(i + x') = E. \quad (2)$$

Si on suppose connue la fonction φ , l'équation (2) donne une relation entre i et x' ou entre $i + x'$ et x' . En tenant compte, l'équation (1) peut s'écrire:

$$Lx'' + \rho x' + \theta(x') + Hx = 0, \quad (3)$$

$\theta(x')$ une fonction toujours égale à $\varphi(i + x')$ en vertu de (2).

Posons

$$x' = \frac{dx}{dt} = y \quad dt = \frac{dx}{y},$$

$$x'' = \frac{dy}{dt} = \frac{y dy}{dx},$$

l'équation (3) devient

$$Ly \frac{dy}{dx} + \rho y + \theta(y) + Hx = 0. \quad (4)$$

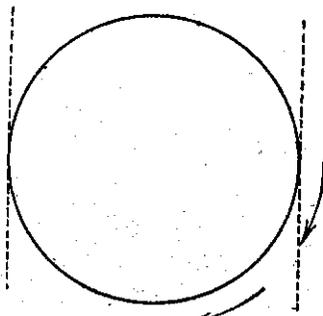


Fig. 15.

Etude de l'équation différentielle. — On peut construire les courbes qui satisfont à cette équation différentielle, à condition de connaître la fonction θ . Les oscillations entretenues correspondent aux courbes fermées, s'il y en a. Mais toute courbe fermée ne convient pas, elle doit remplir certaines conditions de stabilité que nous allons étudier.

Tout d'abord on voit que, si $y = 0$, $\frac{dy}{dx}$ est infini,

la courbe a des tangentes verticales. En outre, si x décroît, x' , c'est-à-dire y , est négatif, donc la courbe doit être décrite dans le sens de la flèche.

Condition de stabilité. — Considérons donc une autre courbe non fermée satisfaisant à l'équation différentielle, ce sera une sorte de spirale se rapprochant indéfiniment de la courbe fermée. Si la courbe fermée représente un régime stable, en décrivant le spirale dans le sens de la flèche on doit être ramené sur la courbe fermée, et c'est à cette seule condition que la courbe fermée représentera un régime stable d'ondes entretenues et donnera la solution du problème.

Condition de possibilité du problème. — Revenons à l'équation (4). Multiplions par $x' dt$ et intégrons, pendant une période, le terme en L et le terme en x , qui donnent à l'intégration des termes en x' et x , disparaissent et on doit avoir

$$\rho \int x'^2 dt + \int \theta(x') x' dt = 0.$$

Or, le premier terme est sûrement positif, la fonction θ doit donc être telle que

$$\int \theta(x') x' dt < 0.$$

Cela est-il possible ?

Supposons que la fonction $\varphi(i + x')$ de $(i + x')$ soit décroissante. Supposons en outre que i soit toujours positif. Pour une même valeur de i , quand x' est positif, $i + x'$ est plus grand que si x' était négatif, donc $\varphi(i + x')$ est plus grand pour x' négatif que pour x' positif. Mais alors pour

une même valeur absolue de x' , $\varphi(i+x')$ est plus grand pour x' négatif que pour x' positif et comme on intègre dans une période pendant laquelle x' oscille entre des valeurs égales et de signes contraires, on voit que $\int \varphi(i+x') x' dt$ ou $\int \theta(x') x' dt$ sera négatif en général.

Cela suppose que, dans l'arc, le courant $(i+x)$ passe toujours dans le même sens et que l'arc ne s'éteint pas. On peut supposer également que le courant change de sens pendant une oscillation.

Si l'arc est symétrique, en conservant les mêmes flèches, on aurait, au cas où le courant viendrait à se renverser :

$$\varphi(i+x') = -\varphi(-i-x').$$

Supposons maintenant qu'il y ait une dissymétrie, alors :

$$\varphi(i+x') \cong -\varphi(-i-x'),$$

$$\theta(x') \cong -\theta(-x'),$$

on aura par exemple

$$\begin{aligned} \text{pour } x' > 0 & \quad \theta(x') = Ax', \\ \text{pour } x' < 0 & \quad \theta(x') = -Bx' \quad B > A. \end{aligned}$$

Si alors x' varie entre $-\alpha$ et $+\alpha$ on aura

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} x' \theta(x') dt < 0.$$

Cas d'oscillations très faibles. — Examinons, dans le seul but de pousser un peu plus le calcul, le cas d'oscillations très faibles; si i_0 est la valeur

moyenne de i , on aura $i = i_0 + \delta i$, δi étant très petit. On pourra alors regarder les variations de φ comme linéaires, puisque ces variations sont très petites et écrire

$$\varphi(i_0 + \delta i) = \varphi(i_0) - B\delta i.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} i &= i_0 + \delta i, \\ x &= x_0 + \delta x, \end{aligned}$$

d'où

$$x' = \delta x' \quad x'' = \delta x''.$$

Les δ étant tous très petits. Les équations (1) et (2) deviennent

$$L\delta x'' + \rho\delta x' + \varphi(i_0) - B\delta i - B\delta x' + Hx_0 + H\delta x = 0, \quad (1^{bis})$$

$$Ri_0 + R\delta x + \varphi(i_0) - B\delta i - B\delta x' = E, \quad (2^{bis})$$

qui donnent d'abord en supposant nuls tous les δ

$$\begin{aligned} \varphi_0 + Hx_0 &= 0, \\ Ri_0 + \varphi_0 &= E, \end{aligned}$$

et en seconde approximation :

$$L\delta x'' + \rho\delta x' - B\delta i - B\delta x' + H\delta x = 0, \quad (1^{ter})$$

$$R\delta i - B\delta i - B\delta x' = 0. \quad (2^{ter})$$

Pour intégrer les équations 1^{ter} et 2^{ter} nous poserons

$$\delta x = ae^{at} \quad \delta i = be^{at}$$

et α doit satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} (L\alpha^2 + \rho\alpha - B\alpha + H)\alpha - Bb &= 0, \\ -B\alpha\alpha + (R - B)b &= 0, \end{aligned}$$

ou en éliminant a et b

$$(L\alpha^2 + \rho\alpha - B\alpha + H)(R - B) - B^2\alpha = 0. \quad (5)$$

On doit avoir, pour les oscillations entretenues, une solution purement imaginaire pour α , il faut donc $B = \rho$ et

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R}$$

Mais ceci ne donne pas les conditions de stabilité.

D'ailleurs les oscillations faibles ne sont pas ce qu'on cherche; en général, on préfère les oscillations finies.

On n'a pas tenu compte, dans ce qui précède, de la self du circuit extérieur, il faudrait introduire dans l'équation (2) un terme $L_1 \frac{di}{dt}$.

Ceci modifierait l'équation (5) de la façon suivante:

$$(L\alpha^2 + \rho\alpha - B\alpha + H)(R - B + L_1\alpha) - B^2\alpha^2 = 0$$

et on doit avoir encore une solution α imaginaire pure.

RÉALISATION PRATIQUE

1° *Arc symétrique.* — En général, lorsque le courant passe, la différence de potentiel aux

bornes monte, suivant la loi d'Ohm. Mais si on a un arc dans le circuit, il n'en est plus ainsi, et au lieu d'une expression de la forme:

$$u = \tau i,$$

on trouve plutôt (par expérience) :

$$u = \frac{a}{i} + b.$$

La chute de résistance doit probablement être due à l'échauffement de l'arc et des gaz de l'arc par le passage d'un courant, échauffement d'autant plus grand que le courant est plus intense.

Quoi qu'il en soit, ceci semble indiquer de prendre pour $\varphi(i + x')$ la forme

$$\varphi(i + x') = \frac{a}{i + x'} + b.$$

On voit alors que, du seul fait que l'on a un arc dans le circuit, la fonction φ devient décroissante; donc, d'après ce qu'on a dit plus haut, il devient possible d'avoir des oscillations entretenues.

Mais on ne pourrait pas dépasser une certaine fréquence, comme nous allons le voir.

La résistance R de l'arc dépend de la température, surtout de la température T de l'anode. Or cette dernière est déterminée par l'équilibre entre la chaleur communiquée à l'arc et celle qu'il perd par rayonnement.

On transforme en chaleur le produit ui , c'est-à-dire ici

$$(i + x')\varphi(i + x');$$

on perd alors par rayonnement une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès de la tempé-

rature de l'arc sur la température ambiante, soit λT , on a donc, en régime d'équilibre :

$$(i + x') \varphi(i + x') = \lambda T. \quad (1)$$

Or, on a aussi $\varphi(i + x') = R(i + x')$; R est la résistance de l'arc, qui est une fonction de T , décroissante quand T augmente; appelons-la $\psi(T)$.

$$\varphi(i + x') = \psi(T)(i + x'). \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire

$$(i + x')^2 \psi(T) = \lambda T. \quad (3)$$

Si on élimine T entre deux des équations (1) (2) (3), on aura la valeur de $\varphi(i + x')$.

DISCUSSION

Mais ceci a été écrit en supposant réalisé l'équilibre de la température. S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si le courant $i + x'$ ne dure pas depuis assez longtemps ou si les oscillations sont trop fréquentes, ces conditions ne sont plus éalisées, l'équation (3) doit être modifiée en introduisant dans le second membre un terme $k \frac{dT}{dt}$ proportionnel à la vitesse d'élévation de température.

Elle devient alors

$$(i + x')^2 \psi(T) = \lambda T + k \frac{dT}{dt} \quad (4)$$

et le système complet d'équations est écrit pour des oscillations très fréquentes. Il comprendra

les équations fondamentales d'où nous sommes partis, l'équation (3) et l'équation (4). On peut l'écrire encore

$$\left. \begin{aligned} Lx'' + \rho x' + (i + x') \psi(T) + Hx &= 0, \\ L \frac{di}{dt} + Ri + (i + x') \psi(T) &= E, \\ (i + x')^2 \psi(T) &= \lambda T + k \frac{dT}{dt}. \end{aligned} \right\} (5)$$

Il n'est pas nécessaire d'intégrer ce système pour voir que, si la fréquence est très grande, la température prendra une valeur moyenne sensiblement constante, de sorte que la résistance de l'arc sera constante et que $\varphi(i + x')$, loin d'être une fonction décroissante, sera proportionnel à $i + x'$. Donc les oscillations à grande fréquence seront impossibles.

2° *Arc dissymétrique.* — Mais supposons maintenant une dissymétrie des électrodes de l'arc, réalisable soit en prenant des électrodes de matières différentes, cuivre et charbon par exemple, soit en prenant des électrodes de même matière mais de propriétés géométriques très différentes (pointe et plaque), soit encore en prenant des électrodes de même matière, mais en refroidissant l'une d'elles; la résistance va varier suivant que c'est l'une ou l'autre des électrodes qui sera l'anode. Dans le cas de deux électrodes pareilles dont l'une est refroidie par exemple, la température de l'anode sera T si c'est l'une, θ si c'est l'autre, il y aura donc une grande variation de $\frac{\varphi(i + x')}{i + x'}$ et cela indépendamment de la fréquence des oscillations.

Donc les oscillations entretenues, qui sont possibles, le seront quelle que soit la fréquence, cela parce que, au lieu de tabler sur les variations de la température avec le temps, comme plus haut, on table maintenant sur une différence de température artificiellement maintenue.



*P - 1/2 hiler
brochure photo*