Die Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b f(x, y)\, \varphi(y)\, dy + \psi(x) \tag{1}$$

wird bekanntlich aufgelöst durch die Integralgleichung derselben Art

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b \psi(y)\, G(x, y)\, dy, \tag{1a}$$

wobei

$$G(x, y) = \frac{N(x, y; \lambda \mid f)}{D(\lambda \mid f)}$$

gesetzt ist. N und D sind, wie aus der Fredholmschen Theorie bekannt ist, zwei ganze transzendente Funktionen in bezug auf λ. Um ihre Entwicklung explizite hinschreiben zu können, bezeichne man, wie Fredholm, mit $f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots x_n \\ y_1, y_2, \cdots y_n \end{pmatrix}$ diejenige n-reihige Determinante, deren allgemeines Element $f(x_i, y_k)$ ist. Setzt man dann

$$a_n = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots x_n \\ x_1, x_2, \cdots x_n \end{pmatrix} dx_1 \cdots dx_n,$$

so hat man

$$D(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} a_n.$$

Diese Gleichung formen wir um, indem wir die durch „Iteration" aus $f(x, y)$ entstehenden Kerne heranziehen. Setzen wir zunächst

$$f(x_\alpha, x_\beta)\, f(x_\beta, x_\gamma) \cdots f(x_\lambda, x_\mu)\, f(x_\mu, x_\alpha) = f(x_\alpha, x_\beta, \cdots x_\lambda, x_\mu),$$

so ist klar, daß $f\begin{pmatrix} x_1, \cdots x_n \\ x_1, \cdots x_n \end{pmatrix}$ die Form hat

$$\sum \pm \Pi f(x_\alpha, \cdots x_\mu),$$

wie sofort aus der Entwicklung der Determinante hervorgeht. Sei nun

$$b_k = \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_\alpha, \cdots x_\mu)\, dx_\alpha \cdots dx_\mu,$$

wobei k die Anzahl der Integrationsvariabeln $x_\alpha, \cdots x_\mu$ bedeutet, so können wir offenbar auch setzen

$$b_k = \int_a^b f_k(x, x)\, dx,$$

wenn unter

$$f_k(x, y) = \int_a^b \cdots \int_a^b f(x, x_\alpha) f(x_\alpha, x_\beta) \cdots f(x_\lambda, y)\, dx_\alpha \cdots dx_\lambda$$

der „k-fach iterierte Kern" verstanden wird.

Wir haben den obigen Relationen zufolge jetzt

$$a_n = \sum \pm \Pi b_k.$$

Beachten wir nun, daß gewisse unter den in einem Produkt Πb_k enthaltenen b_k einander gleich werden können, daß ferner gewisse der Produkte Πb_k selbst einander gleich sein werden, nämlich solche, die durch eine Permutation der x_i auseinander entstehen, so ergibt eine kombinatorische Betrachtung für a_n einen Ausdruck von der Form

$$a_n = \sum_{a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots = n} \frac{n!}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots a!\, b!\, c! \cdots} [(-1)^{\alpha+1} b_\alpha]^a [(-1)^{\beta+1} b_\beta]^b [(-1)^{\gamma+1} b_\gamma]^c \cdots$$

und also

$$D(\lambda) = \sum_{a, b, c, \cdots} \frac{1}{a!\, b!\, c! \cdots} \left(-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a \left(-\frac{\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b \cdot \left(-\frac{\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c \cdots$$

d. h.

(2) $$D(\lambda) = \prod_1^\infty e^{-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}},$$

also

(2a) $$\log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha},$$

(2b) $$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{\alpha-1} b_\alpha.$$

Den Zähler $N(x, y; \lambda)$ der Funktion $G(x, y; \lambda)$ kann man auf analoge Weise durch die Gleichung

(3) $$N(x, y; \lambda) = D(\lambda) \cdot \sum \lambda^h f_{h+1}(x, y)$$

definieren. Diese Gleichungen, welche sich übrigens schon bei Fredholm finden, sind nützlich als Ausgangspunkt für viele Betrachtungen, wie sich nun an einigen Beispielen zeigen wird.

Die Fredholmsche Methode ist unmittelbar gültig nur für solche Kerne $f(x, y)$, die endlich bleiben. Wird der Kern an gewissen

Stellen unendlich, so kann dennoch der Fall eintreten, daß ein iterierter Kern, etwa $f_n(x, y)$, endlich bleibt. Dann läßt sich die Integralgleichung mit dem iterierten Kerne nach Fredholm behandeln, und Fredholm zeigt, daß die ursprüngliche Integralgleichung (1) sich auf diese zurückführen läßt. Die Auflösung wird wieder durch eine Formel der Gestalt (1a) gegeben, nur ist jetzt

$$G = \frac{N_1(x, y; \lambda)}{D_n(\lambda)}$$

zu setzen, wobei

$$D_n(\lambda) = D(\lambda^n \mid f_n)$$

und

$$N_1(x, y; \lambda) = D_n(\lambda) \cdot \sum \lambda^h f_{h+1}(x, y)$$

ist. Dabei sind N_1 und D_n wieder ganze transzendente Funktionen von λ; jedoch zeigt es sich, daß sie einen gemeinsamen Teiler besitzen; wir wollen zusehen, wie sich dies aus unseren Formeln (2) bis (3) ergibt und wie wir eine Bruchdarstellung der meromorphen Funktion G erhalten, bei der Nenner und Zähler ganze Funktionen ohne gemeinsamen Teiler sind.

Aus unserer Annahme über die iterierten Kerne folgt, daß die Koeffizienten $b_n, b_{n+1}, \cdots$ endlich sind. Bilden wir nun in Anlehnung an Gleichung (2a) die Reihe

$$K(\lambda) = -\lambda^n \frac{b_n}{n} - \lambda^{n+1} \frac{b_{n+1}}{n+1} - \cdots,$$

so wird dieselbe konvergieren. Jetzt setzen wir

$$G(x, y; \lambda) = \frac{e^K \sum \lambda^h f_{h+1}}{e^K}$$

und behaupten, in dieser Formel die gewünschte Darstellung zu haben.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß e^K und $e^K \cdot \sum \lambda^{h+1} f_{h+1}$ ganze Funktionen sind.

Zu diesem Zwecke bilden wir $\frac{dK}{d\lambda}$. Man berechnet leicht

$$-\frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = \lambda^{n-1} \int_a^b \frac{N_1(x, x)}{D_n(\lambda)}\, dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda^{n+k-1} \int_a^b \!\! \int \frac{N_1(x, y)}{D_n} f_k(x, y)\, dx\, dy.$$

Hieraus schließt man zunächst, daß $\frac{dK}{d\lambda}$ eine meromorphe Funktion von λ ist; denn sie besitzt höchstens Pole in den Nullstellen von $D_n(\lambda)$, d. h. in den Stellen $\lambda = \alpha \cdot \lambda_i$, wo α eine n-te Einheitswurzel und λ_i ein Eigenwert des Kernes f_n ist. Man kann nun zeigen, daß in diesen möglichen Unendlichkeitsstellen das Cauchysche Residuum von $\frac{dK}{d\lambda}$ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem $\alpha = 1$ oder $\alpha \neq 1$ genommen wird. Die hierzu gehörige Rechnung wollen wir jetzt nicht durchführen; man benutzt dabei den Umstand, daß das für $\lambda = \lambda_k$ genommene Residuum von $\frac{N_1(x, y)}{D_n}$ gleich $\varphi_k(x)\,\psi_k(y)$ ist, wo φ_k, ψ_k, die zu $\lambda = \lambda_k$ gehörigen Eigenfunktionen, den Gleichungen

$$\int_a^b \varphi_k(x)\, f_p(y, x)\, dx = \lambda_k^{-p}\, \varphi_k(y)$$

$$\int_a^b \psi_k(z)\, f_p(z, y)\, dz = \lambda_k^{-p}\, \psi_k(y)$$

genügen. Hieraus folgt, daß $e^{K(\lambda)}$ eine ganze transzendente Funktion ist, die nur an den Stellen $\lambda = \lambda_i$ verschwindet.

Betrachtet man ebenso den Zähler von G, so sieht man zunächst, daß er eine meromorphe Funktion von λ wird, die höchstens an den Stellen $\lambda = \alpha\lambda_i$ unendlich werden kann. Die Betrachtung der Residuen zeigt jedoch, daß dies nicht geschieht, und somit, daß der Zähler $e^K \sum \lambda^h f_{h+1}$ ebenfalls eine ganze transzendente Funktion ist. Damit ist die Reduktion des Fredholmschen Bruches geleistet.

Die Reihenentwicklung für Zähler und Nenner des Fredholmschen Bruches in dieser reduzierten Gestalt erhalten wir, indem wir auf die Bildungsweise von $K(\lambda)$ zurückgehen; setzen wir den Nenner

$$e^{K(\lambda)} = \sum (-\lambda)^n \frac{a'_n}{n!},$$

so haben wir

$$a_n' = \sum_{a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots = n} \pm\, b_\alpha^{\,a}\, b_\beta^{\,b}\, b_\gamma^{\,c} \cdots,$$

wobei zu setzen ist $b_\alpha = 0$ für $\alpha < n$ und

$$b_\alpha = \int_a^b f_\alpha(x, x)\, dx \qquad \text{für } \alpha \geqq n.$$

In analoger Weise wird der Zähler gebildet. Man muß also die Determinanten in der gewöhnlichen Weise entwickeln, aber diejenigen Glieder dieser Entwicklung wegwerfen, welche einen Faktor von der Form $f(x_1, x_2, \cdots x_k)$ mit weniger als n Veränderlichen enthalten.

Unsere Formeln (2), (2a), (3) sind auch in dem Falle von Nutzen, daß außer dem Kern $f(x, y)$ auch alle iterierten Kerne unendlich werden und die Fredholmsche Methode also nun sicher versagt. Seien etwa die Zahlen $b_1, b_2, \cdots b_{n-1}$ unendlich,

$b_n, b_{n+1} \cdots$ endlich.

Man kann dann jedenfalls die Reihe $K(\lambda)$ bilden, fragen ob sie konvergiert und untersuchen, ob $e^{K(\lambda)}$ wieder eine ganze Funktion darstellt. Unter der Voraussetzung, daß $f(x, y)$ ein symmetrischer Kern ist, d. h.

$$f(x, y) = f(y, x),$$

ist mir dieser Nachweis gelungen. Ich benutze dabei die Relationen

$$b_n = \sum \lambda_i^{-n},$$

die für $n > 2$ gelten müssen, da das Geschlecht der Funktion $D(\lambda)$ einem Hadamardschen Satze zufolge kleiner als 2 ist.

Den Beweis mitzuteilen fehlt jetzt die Zeit.

Für den Zähler des Fredholmschen Bruches habe ich die Betrachtung nicht durchgeführt.

Noch einige Worte über die Integralgleichung 1. Art! Auf gewisse derartige Integralgleichungen kann man, wenn man sie zuvor auf Integralgleichungen der 2. Art zurückführt, die Fredholmsche Methode direkt anwenden. Es liege z. B. die Gleichung

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,[e^{ixy} + \lambda f(x, y)]\,dy = \psi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

vor, in der $\psi(x)$ die gegebene, $\varphi(x)$ aber die gesuchte Funktion ist, während der Bestandteil $f(x, y)$ des Kerns eine gegebene Funktion ist, die gewissen, weiter unten angegebenen beschränkenden Voraussetzungen unterworfen ist. Für die gesuchte Funktion $\varphi(y)$ machen wir den Ansatz

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) e^{-izy}\,dz,$$

aus dem nach dem Fourierschen Integraltheorem, falls $\Phi(x)$ die Bedingungen für dessen Gültigkeit erfüllt, umgekehrt

$$2\pi\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy}\,dy$$

folgt. Danach verwandelt sich (1) in

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) f(x, y) e^{-izy}\,dz\,dy = \psi(x)$$

oder

$$2\pi\Phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) K(x, z)\,dz = \psi(x),$$

wenn

$$K(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-izy}\, dy \tag{2}$$

gesetzt wird, und damit sind wir bereits bei einer Integralgleichung 2. Art angelangt. Der Kern (2) gestattet die Anwendung der Fredholmschen Methode z. B. dann, wenn $f(x, y)$ und $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ gleichmäßig in x für $y = \pm\infty$ gegen 0 konvergieren und die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < \frac{M}{1 + y^2}$$

statthat, in der M eine von x und y unabhängige Konstante bedeutet. Von $\psi(x)$ genügt es etwa, anzunehmen, daß es nur endlichviele Maxima und Minima besitzt und im Intervall $-\infty \cdots +\infty$ absolut integrierbar ist.

Wir können dieselbe Methode auf eine Reihe

$$\psi(x) = \sum_{(m)} A_m [e^{imx} + \lambda\theta_m(x)]$$

anwenden; das Problem ist hier also, wenn $\psi(x)$ und die Funktionen $\theta_m(x)$ gegeben sind, die Koeffizienten A_m so zu berechnen, daß die hingeschriebene Entwicklung gültig ist. Handelte es sich soeben um eine Erweiterung des *Fourierschen Integraltheorems*, so haben wir es jetzt mit einer Verallgemeinerung der *Fourierschen Reihe* zu tun.

Setzen wir $\varphi(z)$ in der Form

$$\varphi(z) = \sum_{(m)} A_m e^{imz}; \quad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{-imz}\, dz$$

an, so bekommen wir

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z) \cdot \sum_{(m)} e^{-imz} \theta_m(x) \cdot dz.$$

Von der Reihe, welche hier als Kern fungiert, müssen wir voraussetzen, daß sie absolut und gleichmäßig konvergiert, d. h. wir müssen annehmen, daß

$$\sum_{(m)} |\theta_m(x)| \tag{3}$$

gleichmäßig konvergiert.

Setzen wir beispielsweise

$$\lambda = 1, \quad \theta_m(x) = e^{i\mu_m x} - e^{imx},$$

so erhalten wir eine Entwicklung der Form

$$\psi(x) = \sum_{(m)} A_m e^{i\mu_m x}.$$

Die Bedingung (3) ist erfüllt, wenn wir die absolute Konvergenz von

$$\sum_{(m)} (\mu_m - m)$$

voraussetzen.

Endlich betrachten wir noch die Gleichung

$$(4) \qquad \int_0^{2\pi} \varphi(y)[e^{ixy} + \lambda f(x, y)]\, dy = \psi(x), \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

welche sich von (1) dadurch unterscheidet, daß das Integral nicht in unendlichen, sondern in endlichen Grenzen zu nehmen ist. In diesem Fall darf $\psi(x)$ nicht willkürlich gewählt werden: es muß, falls $f(x, y)$ holomorph ist, sicher eine ganze transzendente Funktion sein, wenn die Gleichung (4) eine Auflösung besitzen soll. Dagegen dürfen die Werte $\psi(m)$ dieser Funktion ψ für alle ganzen Zahlen m im wesentlichen willkürlich angenommen werden. Setze ich nämlich

$$\varphi(z) = \sum_{(m)} A_m e^{-imz}, \quad \text{wo} \quad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(y) e^{imy}\, dy \quad \text{ist,}$$

so verwandelt sich (4), für $x = m$ genommen, in

$$2\pi A_m + \lambda \sum_{(p)} A_p \int_0^{2\pi} e^{-ipy} f(m, y)\, dy = \psi(m).$$

Wir gelangen so zu einem System unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, wie sie von Hill, H. v. Koch, Hilbert u. a. untersucht worden sind. Die Lösung dieses Systems ist, falls wir für die Reihe

$$(5) \qquad \sum_{(p,\, m)} \int_0^{2\pi} e^{-ipy} f(m, y)\, dy$$

die Voraussetzung absoluter und gleichmäßiger Konvergenz machen, der Fredholmschen Lösung der Integralgleichungen durchaus analog und stellt sich wie diese als meromorphe Funktion des Parameters λ dar. Die gleichmäßige und absolute Konvergenz von (5) ist aber, wie sich durch partielle Integration ergibt, sichergestellt, falls die Summe

$$\sum_{(m)} f''(m, z)$$

oder das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x, z)\, dx$$

absolut und gleichmäßig konvergiert.

Man sieht die Ähnlichkeit und den Unterschied der beiden Fälle (1) und (4) deutlich: je nachdem die Integrationsgrenzen unendlich oder endlich sind — oder auch, je nachdem der Kern in den Integrationsgrenzen keine oder eine genügend hohe Singularität aufweist —, darf man die „gegebene" Funktion im wesentlichen willkürlich wählen oder ihr nur eine zwar unendliche, jedoch *diskrete* Reihe von Funktionswerten vorschreiben. Es wäre wohl nicht ohne Interesse, den hier zur Geltung kommenden Unterschied mit Hilfe der Iteration der Kerne näher zu betrachten.