

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 DÉCEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. ARMAND GAUTIER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des quanta.*

Note de M. H. POINCARÉ.

On sait que M. Planck a été conduit par l'étude de la loi du rayonnement des corps noirs à énoncer une hypothèse connue sous le nom de *théorie des quanta*. D'après cette théorie, les éléments auxquels serait dû le rayonnement des solides incandescents et qui seraient assimilables à des résonateurs hertiens, ne pourraient acquérir ou perdre de l'énergie que par sauts brusques, de telle façon que l'énergie d'un pareil résonateur serait toujours multiple d'une quantité fixe caractérisant la longueur d'onde de ce résonateur et appelée *quantum*; cette énergie serait donc toujours égale à un nombre entier de quanta.

Il est inutile de faire remarquer combien cette conception s'éloigne des idées habituellement reçues puisque les lois physiques ne seraient plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles. Il est naturel qu'on cherche à échapper à cette conséquence, sans parler d'une foule de difficultés de détail, et qu'on se demande s'il n'y aurait pas moyen d'expliquer autrement les faits. J'ai donc cherché, si l'on ne pouvait pas rendre compte de la loi de Planck par d'autres hypothèses et je suis arrivé à un résultat négatif.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les paramètres qui définissent l'état d'un système et

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i$$

les équations différentielles qui régissent ce système; les X sont des fonctions des x ; d'après la seconde loi de la Thermodynamique, ce système doit tendre vers un état final de telle façon qu'il existe une fonction W telle que $W d\tau$ représente la probabilité pour que le point x_1, x_2, \dots, x_n soit dans l'élément de volume $d\tau$ de l'espace à n dimensions. Cette fonction doit satisfaire à l'équation

$$(2) \quad \sum \frac{\partial(WX_i)}{\partial x_i} = 0,$$

ce qui veut dire que W est un dernier multiplicateur des équations (1).

Toutes les équations différentielles qui ne possèdent pas de dernier multiplicateur uniforme se trouvent par là exclues. Dans le cas des équations de Hamilton et si les paramètres x sont les variables hamiltoniennes, W est égal à 1. On sait que cette hypothèse est incompatible avec la loi de Planck.

Imaginons un système de résonateurs à courte longueur d'onde; il pourra y avoir échange d'énergie entre ces résonateurs par l'intermédiaire d'atomes, qui, décrivant des trajectoires très étendues, pourront aller de l'un à l'autre et leur transmettre de l'énergie par choc. Ces atomes eux-mêmes, pour plus de simplicité dans l'exposition, pourront être regardés comme des résonateurs à longue période. Soit un résonateur à longue période, x_1 son élongation, y_1 sa quantité de mouvement, ξ son énergie, φ la phase de son mouvement; soit en outre un résonateur à courte période, x_2 son élongation, y_2 sa quantité de mouvement, η son énergie, ψ sa phase; les équations du mouvement pourront s'écrire

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -h_1 x_1 + Z_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = -h_2 x_2 + Z_2;$$

les Z étant les termes dus à l'action du choc et qui sont nuls sauf au moment du choc.

La probabilité pourra être représentée par $W dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$, ou ce qui revient au même $W d\xi d\eta d\varphi d\psi$, si l'on prend comme variables nouvelles les énergies et les phases. Comme W doit rester un dernier multiplicateur même en dehors des chocs (et par conséquent pour les équations dépourvues des termes Z), W ne dépendra que de ξ et de η , et comme les dérogations aux lois de la Mécanique doivent être cherchées dans le résonateur à courte période seul, nous supposerons que W est fonction de η seulement.

Cela posé, imaginons un système formé de n résonateurs à courte période tous pareils, d'énergie $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ et de p résonateurs à longue

période (atomes) tous pareils et d'énergie $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$; on aura, en vertu de la conservation de l'énergie,

$$\sum \xi + \sum \eta = h,$$

h étant une constante donnée. Je désigne par Y la valeur moyenne des η et par X celle des ξ ; nous aurons

$$\begin{aligned} M dh &= \int \Pi d\sigma d\tau, & MX dh &= \int \Pi \xi_1 d\sigma d\tau, & MY dh &= \int \Pi \eta_1 d\sigma d\tau, \\ \Pi &= W(\eta_1) W(\eta_2) \dots W(\eta_n), & d\sigma &= d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n, & d\tau &= d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_p, \end{aligned}$$

où les intégrations sont étendues au domaine défini par les inégalités

$$\xi_i > 0, \quad \eta_i > 0, \quad h < \sum \xi + \sum \eta < h + dh.$$

Sauf dans des cas très exceptionnels, le rapport de Y à X dépendra des entiers n et p ; mais nous devons considérer le cas où ces entiers sont très grands; même alors, il n'est nullement évident *a priori* que ce rapport est indépendant du quotient $\frac{n}{p}$; tant que cette indépendance n'est pas démontrée, il pourrait rester des doutes sur le raisonnement de M. Planck, car si elle n'existait pas, il n'y aurait pas d'état final possible et l'on pourrait se demander si les équations de Boltzmann et les principes de la Thermodynamique sont encore applicables.

Nous pouvons écrire

$$(p-1)! M = \int_0^h \varphi(x) (h-x)^{p-1} dx,$$

$\varphi(x) dx$ étant défini par

$$\varphi(x) dx = \int \Pi d\sigma \quad (\eta_i > 0, x < \sum \eta < x + dx).$$

Supposons que $\varphi(x)$ soit sensiblement égal pour n très grand à

$$N \theta \left(\frac{x}{n} \right) F^n \left(\frac{x}{n} \right),$$

N étant un coefficient constant ne dépendant que de n ; les seuls éléments de nos intégrales qui soient sensibles sont ceux qui sont voisins de la valeur de x qui rend maximum le produit

$$F^n \left(\frac{x}{n} \right) \left(\frac{h-x}{n} \right)^p.$$

On en déduit sans peine

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)},$$

ce qui montre que la relation entre X et Y est indépendante du quotient $\frac{n}{p}$.

Si $W = \eta^m$, on a

$$F(Y) = Y^{m+1}, \quad X = \frac{Y}{m+1}.$$

Si $W = e^{\alpha\eta}$, on a

$$F(Y) = Y e^{\alpha Y}, \quad X = \frac{Y}{\alpha Y + 1}.$$

Enfin, dans l'hypothèse de Planck, on a $W = 0$, sauf si η est multiple de ε , valeurs pour lesquelles W devient infini et de telle façon que l'intégrale $\int W d\eta$ (étendue à un petit intervalle comprenant une des valeurs exceptionnelles) soit égale à 1. On trouve alors

$$\int \varphi(x) dx = \frac{(\beta + n - 1)!}{\beta!(n-1)!},$$

si l'intégrale du premier membre est étendue à un très petit intervalle contenant une valeur de x qui soit multiple de ε et égale à $\beta\varepsilon$, tandis que cette même intégrale est nulle dans le cas contraire. On en déduit

$$F(Y) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right)^{\frac{Y}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{Y}{\varepsilon}\right);$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{X} = L\left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right), \quad Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

C'est bien la formule de Planck.

Pour une théorie plus générale, il faut employer un détour. Posons

$$(3) \quad \Phi(\alpha) = \int_0^{\infty} W e^{-\alpha\eta} d\eta,$$

il viendra

$$\Phi^n(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-\alpha x} dx,$$

ou, en vertu de la formule de Fourier,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha,$$

l'intégrale étant prise soit le long d'une ligne droite, soit le long d'une courbe telle que la partie réelle de α reste positive.

D'où

$$M = \frac{1}{2\pi} \int \int \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x} (h-x)^p dx d\alpha;$$

ou, en posant $x = n\lambda$, $p = Kn$, $h = n\beta$:

$$M = K \int \int \Phi^n(\alpha) e^{n\alpha\lambda} (\beta - \lambda)^{Kn} d\lambda d\alpha,$$

K étant un facteur constant. Les seuls éléments de l'intégrale que nous devons conserver sont ceux qui correspondent au maximum du produit

$$\Phi(\alpha) e^{\alpha\lambda} (\beta - \lambda)^k.$$

Il en résulte que les valeurs de X et de Y seront précisément les valeurs de $\frac{\beta - \lambda}{K}$ et de λ qui correspondent à ce maximum. Cela donne

$$Y = -\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)}, \quad X = \frac{1}{\alpha}.$$

Dans l'hypothèse de M. Planck, on a

$$\Phi = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\epsilon}}, \quad Y = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{X}} - 1}.$$

Pour $W = \eta^m$, on a

$$\Phi = \frac{k}{\alpha^{m+1}}, \quad Y = (m+1)X.$$

Pour $W = e^{\gamma\eta}$, on a

$$\Phi = \frac{1}{\alpha - \gamma}, \quad Y = \frac{X}{1 - \gamma X}.$$

Nous pouvons maintenant répondre à la question que nous nous étions posée au début. Lorsque la loi qui lie Y à X est déterminée, il en est de même de la fonction Φ (à un facteur constant près) et par conséquent de W . L'hypothèse des quanta est donc *la seule* qui conduise à la loi de Planck. Il serait aisé de se rendre compte que les hypothèses particulières que nous avons dû faire pour fixer les idées et simplifier l'exposé ne sont pour rien dans ce résultat.

Mais une loi expérimentale n'est jamais qu'approximative, et il est clair qu'on pourrait imaginer des lois dont les différences avec celle de Planck seraient plus petites que les erreurs d'observation et qui conduiraient à une fonction W continue. Observons toutefois que si $\Phi(\alpha)$ reste fini pour α

infini, et c'est ce qui arrivera toutes les fois que la loi du rayonnement sera telle que le rayonnement total soit fini, l'intégrale $\int_0^{\eta_0} W d\eta$ restera finie quand η_0 tendra vers 0, c'est-à-dire que la fonction W présentera pour $\eta = 0$ le même genre de discontinuité que dans la formule de Planck, ce qui exclut la possibilité de représenter les phénomènes par des équations différentielles.

Notre dernière remarque se rapportera à la seconde théorie de M. Planck; cette seconde théorie conduit à la loi

$$Y = \frac{\varepsilon}{2} \frac{e^{\frac{\varepsilon}{X}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

Les règles précédentes, appliquées à cette loi, montrent que W est nul, sauf quand η est un multiple impair de $\frac{\varepsilon}{2}$, auquel cas W est infinie. Ce n'est pas là l'hypothèse d'où était parti M. Planck. Cette seconde théorie est donc moins bien confirmée que la première par l'analyse qui précède.

MÉCANIQUE. — *Sur l'équilibrage des moteurs.*

Note de M. **L. LECORNU.**

La vive allure imposée depuis quelques années à certaines catégories de moteurs nécessite un équilibrage très soigné, faute duquel les trépidations prendraient une importance désastreuse. Le problème n'est pas toujours aisé à résoudre, et l'on conçoit, par exemple, qu'un moteur d'aviation pourvu de cylindres en éventail soit plus difficile à équilibrer qu'un moteur à cylindres parallèles. Je désire montrer que le résultat peut théoriquement être obtenu par la simple adjonction de deux ou trois masses auxiliaires, assimilées à des points matériels.

Équilibrer un moteur, ou, d'une façon générale, un système en mouvement, c'est faire en sorte que les appuis éprouvent des pressions constantes. Dans les moteurs à explosion, que j'ai spécialement en vue, les forces extérieures sont : la pesanteur ; un couple résistant que nous regarderons comme constant ; enfin, les réactions des appuis. Si ces dernières sont constantes, la résultante de translation des forces antérieures ne varie pas, et il en est de même, par suite, de la vitesse du centre de gravité. On peut ajouter que, si, comme nous le supposerons, les appuis sont immobiles, cette vitesse est