

SUR DIVERSES QUESTIONS RELATIVES A LA TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

DÉTERMINATION A PRIORI DE LA LONGUEUR D'ONDE ET DE L'AMORTISSEMENT D'UN EXCITATEUR DE FORME DONNÉE

C'est un problème très compliqué qui comporte cependant une solution théorique complète par la méthode de Fredholm. Je me propose d'indiquer ici le principe de la méthode sans en donner la démonstration.

§ 1. — Commençons par un exemple simple. Supposons qu'on ait n quantités données : y1, y2, yn, et n inconnues : x1, x2, xn, les inconnues x étant déterminées par des équations de la forme suivante :

xi = λ Σ αik xk + yi,

λ désignant un paramètre et les α des coefficients constants. Autrement dit, les inconnues x sont déterminées en fonction des quantités données y par un système d'équations linéaires.

Proposons-nous de développer les x suivant les puissances croissantes de λ. On obtient pour xi une première approximation en posant : xi = yi, une seconde approximation en remplaçant dans le second membre xk par yk :

xi = λ Σ αik yk + yi,

et ainsi de suite, mais la convergence du développement ainsi obtenu serait très lente.

Un autre procédé vient à l'esprit pour obtenir le développement; il consiste à résoudre les équations linéaires par la méthode des déterminants et on obtient :

xi = Ni / Δ.

Ni et Δ sont des polynômes entiers en λ

et le développement est alors convergent.

§ 2. — Supposons maintenant une fonction donnée ψ(x) et une fonction inconnue φ(x) définie par une équation intégrale :

φ(x) = λ ∫ K(x, y) φ(y) dy + ψ(x),

où K(x, y) est une fonction connue de x et y appelée noyau, jouant le rôle du coefficient constant α du paragraphe précédent.

La fonction φ(x), de même que la fonction ψ(x), est supposée définie entre deux limites a et b et l'intégrale est prise entre ces deux limites.

Nous sommes ainsi amenés à introduire l'intégrale : ∫ K(x, y) φ(y) dy qui est une sorte de transformation linéaire de la fonc-

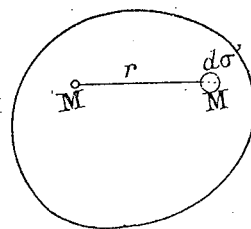


Fig. 1.

tion φ et le résultat de cette transformation est une fonction de x que j'appelle : Sφ(x).

§ 3. — Au lieu d'une intégrale simple, on pourrait prendre aussi une intégrale multiple.

Soit, par exemple (fig. 1), une surface sur laquelle je suppose une matière attirante de densité superficielle μ. Le potentiel en un point quelconque M de la surface sera :

V = ∫ μ' dσ' / r.

Le point M joue le rôle de la variable x

le point M' celui de la variable y; la fonction $\frac{1}{r}$ dépendant à la fois de la position des points M et M' joue le rôle du noyau K(x, y); enfin la fonction μ' correspond à la fonction $\varphi(y)$.

Le potentiel V au point M s'obtient donc en opérant sur la fonction μ une transformation que je désignerai par $S\mu$.

§ 4. — Etant donnée une fonction φ , j'ai défini la transformation qui permet d'obtenir la fonction $S\varphi$. Cette substitution linéaire peut être réitérée et je puis effectuer sur la fonction $S\varphi$ la même opération. J'obtiendrai ainsi la fonction S($S\varphi$) que je désignerai par $S^2\varphi$. Quelle est la forme de cette fonction : $S^2\varphi$?

On a :

$$S\varphi = \int K(x, y) \varphi(y) dy,$$

$$S^2\varphi = \iint K(x, z) K(z, y) \varphi(y) dz dy.$$

Tout se passe donc comme si on faisait subir à la fonction φ une simple transformation avec le noyau :

$$K_2(x, y) = \int K(x, z) K(z, y) dz.$$

On a en effet :

$$S^2\varphi = \int K_2(x, y) \varphi(y) dy.$$

On peut continuer de la même façon, et on a pour le noyau d'ordre n :

$$K_n(x, y) = \int K_{n-1}(x, z) K(z, y) dz,$$

$$S^n\varphi = \int K_n(x, y) \varphi(y) dy.$$

Dans l'exemple du potentiel que nous avons pris plus haut, le potentiel dû à l'attraction de la matière, de densité superficielle μ , est $S\mu$. Si je suppose répartie sur la surface une deuxième couche attirante dont la densité soit μ' , le potentiel dû à cette deuxième couche sera : $S^2\mu$, etc.

§ 5. — Ceci posé, revenons à notre équation intégrale :

$$\varphi(x) = \lambda S\varphi(x) + \psi(x).$$

Par la méthode par approximations successives, on obtient pour le développement de φ suivant les puissances de λ :

$$\varphi = \psi + \lambda S\psi + \lambda^2 S^2\psi + \dots = \Sigma(\lambda).$$

Sous cette forme, la série ne serait guère utilisable parce qu'elle est très lentement convergente.

Alors Fredholm a eu l'idée de remplacer le développement précédent par le quotient de deux séries convergentes.

Posons :

$$b_n = \int K_n(x, x) dx;$$

b_n est une constante.

Formons l'expression $\Sigma \frac{\lambda^n b_n}{n}$ et posons :

$$\Delta = e^{-\Sigma \frac{\lambda^n b_n}{n}}.$$

Cette dernière expression peut se développer suivant les puissances de λ , et la série obtenue converge toujours avec rapidité pour toutes les valeurs de λ .

Il arrive que le produit des deux séries $\Sigma(\lambda)$ et Δ donne une série qui est aussi très convergente; nous prendrons alors pour développement de la fonction φ :

$$\varphi = \frac{\Sigma\lambda}{\Delta}.$$

Le numérateur et le dénominateur convergeront très rapidement.

§ 6. — La méthode de Fredholm est susceptible de diverses généralisations.

Au lieu d'intégrales simples je puis considérer des intégrales doubles. Soit l'équation intégrale :

$$\varphi(M) = \lambda \int K(M, M') \varphi(M') d\sigma' + \psi(M),$$

le noyau K(M, M') étant fonction des coordonnées des points M et M'. J'aurai :

$$\varphi = \Sigma(\lambda) = \psi + \lambda S\psi + \lambda^2 S^2\psi + \dots$$

et

$$\Delta = e^{-\Sigma \frac{\lambda^n b_n}{n}}, \quad b_n = \int K_n(M, M) d\sigma,$$

et enfin :

$$\varphi = \frac{\Sigma\Delta}{\Delta}.$$

REMARQUE. — J'ai supposé que la fonction ψ était donnée ainsi que λ : la fonction inconnue est $\varphi(x)$. Quelquefois le problème se pose sous une autre forme.

Dans l'exemple simple que nous avons considéré tout au début et où nous avons :

$$x_i = \lambda \Sigma \alpha_{ih} x_h + y_i,$$

nous avons :

$$x_i = \frac{N_i}{\Delta}.$$

Supposons que toutes les quantités y soient nulles. La condition pour que le système d'équations précédentes (système linéaire et homogène) admette une solution est que Δ soit nul.

De même, revenons à notre équation intégrale et supposons que ψ soit nul. En général, nous n'aurons d'autre solution que $\varphi=0$; pour que nous en ayons une autre, il faut que λ ait une valeur convenable donnée par l'équation : $\Delta = 0$.

C'est cette condition : $\Delta = 0$ qui nous donnera plus loin pour un excitateur de forme donnée la valeur de la longueur d'onde et de l'amortissement.

§ 7. — Une autre généralisation est possible. Nous pouvons avoir deux équations intégrales simultanées définissant deux fonctions inconnues $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$:

$$\varphi_1(x) = \lambda \int K(x, y) \varphi_1(y) dy + \lambda \int L(x, y) \varphi_2(y) dy + \psi_1(x),$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \int M(x, y) \varphi_1(y) dy + \lambda \int N(x, y) \varphi_2(y) dy + \psi_2(x),$$

ψ_1 et ψ_2 étant deux fonctions données, ainsi que K, L, M, N.

Ce cas se ramène au précédent (Fredholm) de la manière suivante :

Posons :

$$S\varphi_1 = \int K\varphi_1(y) dy + \int L\varphi_2(y) dy,$$

$$S\varphi_2 = \int M\varphi_1(y) dy + \int N\varphi_2(y) dy.$$

$S\varphi_1$ et $S\varphi_2$ s'obtiennent en effectuant sur φ_1 et φ_2 de véritables substitutions linéaires. On peut définir aussi $S^2\varphi_1$ et $S^2\varphi_2$ et ces quantités seraient exprimées en fonction de φ_1 et φ_2 par des formules de même forme que les précédentes, les noyaux réitérés K_2, L_2, M_2, N_2 se définissant comme dans le cas précédent.

Les équations intégrales peuvent s'écrire alors :

$$\varphi_1, \varphi_2 = \lambda S(\varphi_1, \varphi_2) + \psi_1, \psi_2.$$

Le calcul se continuera de la même manière. Nous formerons :

$$b_n = \int K_n(x, x) dx + \int N_n(x, x) dx$$

en prenant les noyaux de la diagonale principale.

On peut aussi prendre des intégrales doubles au lieu d'intégrales simples. Par exemple, considérons une surface et le plan tangent en un point M de cette surface dans lequel nous prendrons deux axes de coordonnées

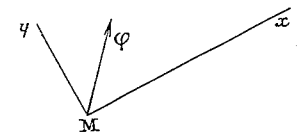


Fig. 2.

rectangulaires (fig. 2). Soit φ un vecteur situé dans le plan tangent en M et ayant pour projections, sur les deux axes choisis, φ_1 et φ_2 . Alors $S\varphi_1$ et $S\varphi_2$ seront les projections d'un nouveau vecteur dépendant linéairement du premier.

§ 8. — Il n'y a pas de difficulté si le noyau reste constamment fini, car toutes les quan-

tités b_n restent finies. Mais il y a des cas où il n'en sera pas de même. Prenons d'abord le cas d'une intégrale simple. Si je suppose que $K(x, y)$ devienne infini pour $x=y$, tout dépendra de l'ordre d'infinitude de K .

Si, pour $x=y$, K devient infini d'ordre plus petit que $\frac{1}{2}$, on démontre aisément que K_2 reste fini ainsi que tous les noyaux suivants.

Si K devient infini, d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$ mais inférieur à $\frac{2}{3}$, K_2 sera aussi infini mais K_3 sera fini ainsi que tous les noyaux suivants.

D'une manière générale, si K devient infini d'ordre plus petit que 1, les premiers noyaux seront infinis, mais à partir d'un certain rang tous les noyaux seront finis. On supprimera alors, dans la série, les premiers termes infinis et la méthode s'appliquera tout aussi bien.

Quand il s'agit d'une intégrale double, si le noyau $K(M, M')$ devient infini pour $M=M'$, la méthode pourra s'appliquer si l'ordre d'infinitude est inférieur à 2.

§ 9. — Application : distribution de l'électricité sur un conducteur. — Considérons un corps conducteur placé dans un champ extérieur produit par des masses données. Soit μ la densité superficielle de l'électricité au point M .

Le potentiel au point M produit par l'électricité superficielle est :

$$\int \frac{\mu' d\sigma'}{r}$$

et la composante suivant un axe de l'attraction est :

$$\int \cos \varphi \frac{\mu' d\sigma'}{r^2}$$

φ étant l'angle de MM' avec la direction de l'axe choisi.

C'est une intégrale analogue à celle que nous avons considérée plus haut, où le noyau est : $\frac{\cos \varphi}{r^2}$.

Envisageons un point très voisin de la

surface du conducteur et considérons-y la composante normale de l'attraction; on doit distinguer deux cas selon que le point est à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface du conducteur (fig. 3).

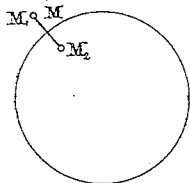


Fig. 3.

On sait, d'après la théorie de l'électricité, qu'il existe une différence finie entre les deux valeurs de l'attraction de part et d'autre de la surface.

Que représente $\int \cos \varphi \frac{\mu' d\sigma'}{r^2}$? Quand M' vient en M , r devient nul; le noyau est infini. Pour définir l'intégrale on entoure le point M d'une petite aire fermée et on fait tendre vers 0 le petit cercle de garde (fig. 1).

L'intégrale

$$S\mu = \int \cos \varphi \frac{\mu' d\sigma'}{r^2}$$

est la limite vers laquelle tend l'intégrale.

L'attraction au point M_1 sera : $S\mu + 2\pi\mu$.
 M_2 sera : $S\mu - 2\pi\mu$.

Notre inconnue est μ . Soit h le champ dû aux masses extérieures. On sait que le champ électrique à l'intérieur du conducteur (en M_2) est nul, de sorte que l'équation définissant μ est :

$$S\mu - 2\pi\mu + h = 0.$$

L'équation définissant μ est donc une équation intégrale :

$$\mu = \lambda S\mu + \frac{h}{2\pi} \quad (\lambda = \frac{1}{2\pi})$$

qu'on peut résoudre par la méthode de Fredholm, mais pour que l'intégration soit possible il ne faut pas que le noyau soit infini d'ordre supérieur ou égal à 2 quand M' tend vers M .

Or, quand M' tend vers M , r tend vers 0, $\cos \varphi$ tend vers 0, mais r est infiniment petit du 1^{er} ordre, $\cos \varphi$ infiniment petit du 1^{er} ordre; le quotient $\frac{\cos \varphi}{r^2}$ est donc infiniment petit du 1^{er} ordre. Comme il s'agit d'une intégrale double, la méthode est applicable.

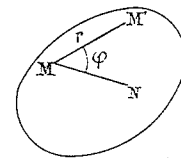


Fig. 4.

Pour avoir les termes du développement, il faut calculer $S\frac{h}{2\pi}$, $S^2\frac{h}{2\pi}$, etc.

Alors :

$$\mu = \frac{h}{2\pi} + \lambda S\frac{h}{2\pi} + \lambda^2 S^2\frac{h}{2\pi} + \dots$$

Il reste à calculer b_n et Δ . Pour avoir b_n je suppose d'abord $\frac{h}{2\pi} d\sigma = 1$ sur l'élément superficiel du point M et égal à zéro par ailleurs. Nous calculerons dans cette hypothèse $S_n(\frac{h}{2\pi})$ et il suffira d'intégrer sur toute la surface pour avoir b_n .

C'est là une solution satisfaisante pour le théoricien, mais si on voulait l'appliquer en pratique, les calculs seraient très longs.

§ 10. — On peut appliquer une méthode tout à fait analogue au problème qui nous occupe.

Ecrivons les équations du champ électromagnétique en prenant pour unité de vitesse la vitesse de la lumière :

$$z = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$

$$4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$$

$$\Sigma \frac{df}{dx} = f,$$

$$\Sigma \frac{da}{dx} = 0, \\ 4\pi \left(u + \frac{df}{dt} \right) = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

où :

F, G, H sont les composantes du potentiel vecteur;

f, g, h sont les composantes du déplacement électrique;

α, β, γ sont les composantes du champ magnétique;

u, v, w sont les composantes du courant de conduction;

ρ est la densité électrique.

Le potentiel vecteur n'est pas complètement déterminé. On achèvera de le déterminer en posant :

$$\Sigma \frac{dF}{dx} + \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

On en déduit :

$$4\pi \rho = \frac{d^2\psi}{dt^2} - \Delta\psi,$$

$$4\pi u = \frac{d^2F}{dt^2} - \Delta F.$$

Pour interpréter ces équations, définissons le potentiel retardé. Etant donnée une fonction $\varphi(x, y, z, t)$, si on pose :

$$P(\varrho) = \int \varphi(x', y', z', t-r) \frac{1}{r} dx' dy' dz',$$

$P(\varrho)$ sera appelé le potentiel retardé de la fonction φ , r étant la distance du point (x, y, z) au point (x', y', z') .

Les équations précédentes expriment que ψ est le potentiel retardé de ρ , et que F est le potentiel retardé de u :

$$\psi = P(\rho), \\ F = P(u).$$

J'admettrai, par l'artifice bien connu, que φ ne dépend de t que par le facteur $e^{i\omega t}$, ω ayant pour partie réelle $\frac{2\pi}{T}$, T étant la période du mouvement vibratoire, la partie imaginaire de ω définissant l'amortissement.

Le potentiel retardé est alors :

$$\int e^{i\omega t} \varphi(x', y', z') \frac{e^{-i\omega r}}{r} dx' dy' dz'.$$

On voit donc que le potentiel retardé revient à un potentiel ordinaire, où la fonction de forces serait $\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ au lieu de $\frac{1}{r}$.

Dans le cas qui nous occupe, nous pouvons supposer que les courants de conduction et l'électricité libre se trouvent concentrés à la surface des conducteurs. On n'a plus alors que des surfaces attirantes, et en chaque point de ces surfaces, on a une quantité scalaire μ représentant la densité superficielle de l'électricité et un vecteur U, V, W tangent à la surface du conducteur qui représente la densité superficielle du courant de conduction.

Le potentiel V dû à une surface attirante est continu lorsqu'on traverse cette surface, mais la composante normale de l'attraction est discontinue, la discontinuité étant égale à $4\pi\mu$. Quant à la composante tangentielle de l'attraction, elle est continue.

Si donc on prend pour axe des x la normale à la surface du conducteur, $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$ sont continus, $\frac{dV}{dx}$ est discontinu.

Cela est vrai pour le potentiel newtonien, mais en est-il de même pour le potentiel retardé? Oui, car la différence de deux intégrales reste continue puisque $\frac{e^{-i\omega r} - 1}{r}$ reste fini quand r tend vers 0.

Quelles conséquences en déduit-on?

A l'intérieur des conducteurs le champ est nul. Prenons la normale au conducteur pour axe des x .

$\frac{dF}{dx}$ est discontinu, $\frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dz}$ sont continus.

Donc : α , composante normale du champ, est continu et, par suite, nul à l'extérieur.

$$\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx},$$

$$\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Le potentiel F, G, H est engendré par U, V, W .

Donc en passant de l'intérieur à l'extérieur β passe de 0 à :

$$\beta = -4\pi W.$$

De même :

$$\gamma = 4\pi V.$$

Donc, à la surface du conducteur, le champ magnétique est proportionnel au courant et lui est perpendiculaire.

On a aussi :

$$4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx},$$

$\frac{dF}{dt}$ est continu, $\frac{d\psi}{dx}$ discontinu, la discontinuité étant $4\pi\mu$.

Donc, $f = -\mu$; g et h sont continus.

Donc, les lignes de force électriques aboutissent normalement à la surface des conducteurs.

(A suivre.)

H. POINCARÉ.

CALCUL RAPIDE DES CONDUCTEURS AÉRIENS AU MOYEN D'UN ABAQUE UNIQUE

Sans modifier le principe de l'abaque fondamental contenu dans ma communication de 1902 au Congrès de la Houille Blanche (1) et reproduit par la *Lumière Electrique* dans son

(1) Grenoble, Annecy, Chamonix, 7-13 septembre 1902.

dernier numéro (1), j'ai trouvé intérêt à en réaliser l'exécution sous une forme nouvelle un peu différente.

Lorsqu'on porte en abscisses non plus les

(1) 31 décembre 1910.

bruts de l'expérience est établie dans des formules simples dont la valeur pratique se trouve ainsi consacrée. Un prochain travail examinera le cas d'une machine à pôles saillants massifs.

M. D. Bercovitz expose comment, dans les appareils de mesure, *enregistreurs Paul Meyer*, on s'est efforcé d'alléger la partie mobile du poids de l'encre en constituant la plume par un tube capillaire dont l'une des extrémités plonge dans l'encrier. Il étudie la constitution de ces appareils et donne leurs spécifications au point de vue consommation.

M. Winkler décrit les opérations nécessitées par la pose d'un câble à haute tension dans le lac de Würth. L'immersion a pu se faire en vingt minutes sur une longueur de 700 mètres et à une profondeur de 30 mètres.

Le dispositif que décrit M. H. Saint-Clair-Putnam est une sorte de compteur horaire qui permet d'effectuer un contrôle sérieux sur la manière dont les wattmen utilisent le courant. Le classement de ceux-ci, par ordre de mérite, en est la conséquence, mais il en est une autre plus importante au point de vue des directeurs d'entreprises de traction, c'est l'économie de puissance possible dans l'exploitation des chemins de fer.

Rappelons que les rapports de MM. Bouton et Battes, présentés à l'Exposition Internationale de Bruxelles et reproduits récemment

ici-même (*) envisageaient plus largement la même question.

On a tant parlé déjà des *unités électriques*, elles ont subi au cours des trente années qui viennent de s'écouler tant de modifications, la valeur des étalons a été si souvent modifiée, inais toujours de si peu, que beaucoup d'électriciens se désintéressent complètement de cette question; la considérant d'ailleurs comme définitivement close.

Et cependant on n'est pas encore absolument d'accord.

Tout récemment, des expériences collectives internationales ont été entreprises à Washington et nous en publions aujourd'hui un premier résultat quasi officiel mais non encore définitif.

L'heure est donc propice pour retracer brièvement l'histoire de la question, afin d'en montrer toutes les difficultés — difficultés théoriques et difficultés provenant de susceptibilités nationales — et aussi de mieux faire comprendre le pourquoi de ces nouvelles expériences.

Nous donnons enfin, dans nos Notes Industrielles, la description d'un *appareil combiné pour la mesure des accélérations et des rampes* dû à M. P. Trotter. Cet appareil n'est pas électrique, il est vrai, mais il peut trouver emploi sur les voitures de tramways ou de chemins de fer.

(*) BOUYON et BATTES. Résultats obtenus par l'emploi de compteurs sur les voitures de tramways. *Lumière Electrique*, (2^e série), t. XII, p. 41.

SUR DIVERSES QUESTIONS RELATIVES A LA TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

(Suite) (*).

DÉTERMINATION A PRIORI DE LA LONGUEUR D'ONDE ET DE L'AMORTISSEMENT D'UN EXCITATEUR DE FORME DONNÉE (suite).

§ 11. — Arrivons au problème qui nous occupe. Ce problème peut se présenter sous deux formes.

1^o Etant donné un excitateur de forme donnée, je suppose connu le champ qu'il produit et je considère un appareil récepteur constitué par un conducteur.

Dans cet appareil récepteur vont se produire des courants superficiels U, V, W et une densité superficielle électrique, ρ .

Je distinguerai le champ extérieur dû à l'excitateur, et le champ intérieur dû aux courants superficiels du récepteur. Ce dernier est inconnu.

Mais, en écrivant que le champ magnétique total à l'intérieur du récepteur a ses composantes tangentielles nulles, nous aurons des équations intégrales déterminant le vecteur (U, V, W) .

2^o Nous avons supposé que nous avons en présence un excitateur et un récepteur. Si l'on a seulement un excitateur, nous n'avons plus alors qu'un champ qui est le champ intérieur dû à l'excitateur; le champ extérieur disparaît. Les équations intégrales n'ont pas de second membre, et pour qu'elles admettent une solution, il faut que Δ soit nul.

Cette condition: $\Delta = 0$ définira ω , c'est-à-dire la longueur d'onde et l'amortissement de l'excitateur.

§ 12. — Nous allons développer ce qui précède.

(*) Voir *Lumière Electrique*, 7 janvier 1911.

Soit J le vecteur ayant pour composantes U, V, W , qui représente la densité superficielle du courant de conduction. C'est un vecteur tangent à la surface du conducteur.

Introduisons alors le vecteur $S (J)$. Pour cela, je calcule au point M le champ magnétique α, β, γ que je projette sur le plan tangent en M . J'obtiens ainsi un vecteur que je fais tourner de 90° dans le plan tangent. Ce dernier vecteur est $S (J)$.

Si je prends un système d'axes de coordonnées rectangulaires ayant pour origine le point M et tel que Mx soit la normale en M à la surface du conducteur, les projections du vecteur $S (J)$ sur les deux axes My et Mz seront: γ et $-\beta$.

Considérons un petit élément $d\sigma'$ et supposons que ce petit élément soit la seule partie active du conducteur. Autrement dit, le seul courant qui existe est: $J' d\sigma'$ au point M' . Quel va être le vecteur $S (J')$?

On a:

$$\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx},$$

$$\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

F est le potentiel retardé dû au vecteur J' et, par conséquent, a pour expression:

$$J' d\sigma' \cos(J', x) \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

d'où:

$$\frac{dF}{dz} = J' d\sigma' \cos(J', x) D \cos(z, r),$$

en posant:

$$D = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-i\omega r}}{r} \right).$$

Donc :

$$\beta = \int D d\sigma [\cos(J', x) \cos(z, r) - \cos(J', z) \cos(x, r)].$$

On calculerait de même γ et on a ainsi les projections de $S(J)$ qui sont : γ et $-\beta$.

Si maintenant, au lieu d'un seul élément actif, on a une surface entière active, on n'a qu'à intégrer ; alors $S(J)$ va se présenter sous la forme d'une intégrale définie.

Il n'y a pas de difficulté si le point M ne fait pas partie de la partie active de la surface. Dans le cas contraire, on a vu que β et γ sont discontinus : le saut brusque de la composante tangentielle du champ magnétique étant égal au produit par 4π de la densité superficielle du courant, quand on passe de l'intérieur à l'extérieur de la surface.

Quant à $S(J)$, c'est la limite de l'intégrale obtenue en décrivant autour du point M un petit cercle de garde et en faisant tendre vers 0 le rayon de ce petit cercle.

En résumé, si sur la normale en M je considère les deux points M_1 et M_2 infiniment

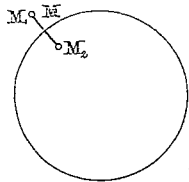


Fig. 5.

voisins de M , de part et d'autre de celui-ci, la moyenne arithmétique des projections sur le plan tangent du champ en M_1 et du champ en M_2 sera appelée le champ au point M et, en opérant sur ce vecteur une rotation de 90° , j'obtiendrai le vecteur $S(J)$.

Au point M , la composante tangentielle du champ magnétique est représentée par le vecteur $S(J)$ auquel on a fait subir une rotation de 90° ; au point M_1 , elle est : $S(J) + 2\pi J$ et au point M_2 : $S(J) - 2\pi J$.

Considérons d'abord le problème de la réception. Soit E l'excitateur, R , le récepteur.

Les courants sont connus à la surface de

l'excitateur et nous cherchons les courants à la surface du récepteur.

$S(J)$ peut être décomposée en deux parties : l'une correspondant aux courants de l'excitateur, l'autre à ceux du récepteur :

$$S(J) = S_R(J) + S_E(J).$$

Le courant étant connu sur l'excitateur, $S_E(J)$ est une fonction connue ; il n'en est pas de même de $S_R(J)$.

J'écris qu'en un point M_2 , très voisin de la surface du récepteur et à l'intérieur de celui-ci, le champ magnétique est nul :

$$S_R(J) + S_E(J) - 2\pi J = 0.$$

$S_E(J)$ est une fonction connue que nous appellerons $2\pi T$. Quant à $S_R(J)$, nous l'appellerons désormais $S(J)$, aucune ambiguïté n'étant plus possible. On a donc :

$$S(J) + 2\pi T - 2\pi J = 0,$$

ou :

$$J = \lambda S(J) + T,$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}.$$

On arrive ainsi à une équation de Fredholm.

Ayant défini le vecteur $S(J)$, on définira de même $S^2(J)$, etc.

La solution de l'équation de Fredholm est :

$$J = T + \lambda S(T) + \lambda^2 S^2(T) + \dots$$

Cette série n'étant pas suffisamment convergente, on multipliera et divisera par la série :

$$\Delta = e^{-\frac{2\pi b_n}{n}}.$$

Pour former cette série, il faut former les quantités b_n .

Soit, au point M , un élément superficiel ds que nous supposons d'abord être la seule partie active de la surface du conducteur. Soient j_1 et j_2 les composantes du vecteur J

suivant deux axes situés dans le plan tangent au point M .

Soient j'_1, j'_2 les composantes du vecteur $S_n(J)$ au point M . On a :

$$j'_1 = \alpha_n j_1 d\sigma + \beta_n j_2 d\sigma, \\ j'_2 = \gamma_n j_1 d\sigma + \delta_n j_2 d\sigma.$$

Alors :

$$b_n = \int (\alpha_n + \delta_n) d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface du récepteur.

Pour que la méthode soit applicable, il faut que, à partir d'un certain rang, b_n soit fini. Il suffit pour cela que le noyau devienne infini d'ordre plus petit que 2. Or, nous allons voir que le noyau devient infini du premier ordre.

En effet, $\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ devient infini du premier ordre quand r tend vers zéro. Donc, sa dérivée D est infinie du second ordre. Le vecteur J' étant dans le plan tangent et l'axe des x étant normal à la surface, $\cos(J', x)$ et $\cos(x, r)$ sont infiniment petits du premier ordre. Donc le noyau est infini du premier ordre.

Ce que nous venons de dire s'applique à la réception.

Dans le problème de l'excitation, je n'ai plus qu'un seul conducteur : l'excitateur.

La fonction T disparaît donc et l'équation intégrale est une équation linéaire sans second membre.

Pour que cette équation admette une solution, il faut qu'on ait $\Delta = 0$.

Or Δ est une fonction entière de $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ et aussi de ω . L'équation : $\Delta = 0$ définit donc la période et l'amortissement de l'excitateur donné.

§ 13. — Telle est la solution théorique complète du problème, mais, s'il fallait appliquer cette solution en pratique, les calculs seraient extrêmement ardues. Il faut trouver des artifices pour réduire ces calculs. Je

vais maintenant indiquer dans quelle voie on peut chercher pour rendre la méthode plus pratique.

Supposons le problème résolu dans un cas particulier et proposons-nous de le résoudre dans un cas peu différent.

Le problème est donc supposé résolu dans le cas du noyau $K(x, y)$; c'est-à-dire qu'on sait former $K_n(x, y)$ et calculer b_n .

Prenons un noyau peu différent :

$$K(x, y) + \varepsilon K'(x, y).$$

Le noyau réitéré sera ici :

$$K_n + \varepsilon K'_n + \varepsilon^2 K''_n + \dots$$

et b_n aura ici la valeur :

$$b_n + \varepsilon b'_n + \varepsilon^2 b''_n + \dots$$

Si nous pouvons calculer facilement :

$$K'_n, K''_n, \dots, b'_n, b''_n, \dots,$$

le problème sera résolu.

Introduisons ici une notion nouvelle : celle des fonctions fondamentales.

Je prends une équation de Fredholm :

$$\varphi(x) = \lambda S[\varphi(x)] + \psi(x).$$

La solution est :

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int \frac{\psi(y) N(x, y, \lambda)}{\Delta} dy,$$

$$\frac{N}{\Delta} = \lambda K(x, y) + \lambda^2 K_2(x, y) + \dots$$

$\frac{N}{\Delta}$ est une fonction de λ qui peut se décomposer en fractions simples :

$$\frac{N}{\Delta} = \sum \frac{N(x, y, \lambda_i)}{(\lambda - \lambda_i) \Delta'(\lambda_i)}$$

λ_i étant une des racines de l'équation : $\Delta = 0$.

On démontre aisément que l'on a :

$$N \lambda_i = \lambda_i \Delta' \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y).$$

Par conséquent, à chaque racine de l'équation $\Delta = 0$, correspondra une paire de fonc-

tions : $\xi_i(x)$, $\eta_i(y)$ appelées fondamentales (de 1^{re} et de 2^e sortes).

Dans ces conditions, la fonction fondamentale de première sorte ξ_i est définie par :

$$\xi_i = \lambda_i S(\xi_i).$$

C'est une solution de l'équation sans second membre avec la valeur particulière $\lambda_i = \lambda_i$.

De même, la fonction η_i est définie par :

$$\eta_i = \lambda_i S'(\eta_i).$$

S' étant tout à fait analogue à S mais formé avec le noyau inverse : $K(y, x)$.

Supposons que nous connaissions ces deux catégories de fonctions fondamentales. Nous avons :

$$K_n(x, y) = \sum \lambda_i^{-n} \xi_i(x) \eta_i(y)$$

et :

$$b_n = \sum \lambda_i^{-n}.$$

Nous avons d'autre part :

$$\left. \begin{aligned} \int \xi_i(x) \eta_i(x) dx &= 1, \\ \int \xi_i(x) \eta_k(x) dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ces relations rappellent par leur forme celles que l'on rencontre dans la théorie de la série de Fourier et dans la théorie des fonctions sphériques.

De même que ces dernières relations permettent de développer une fonction quelconque en série de Fourier, de même, ici, nous allons pouvoir mettre une fonction quelconque de x sous la forme :

$$\sum \alpha_i \xi_i(x),$$

une fonction quelconque de y sous la forme :

$$\sum \beta_j \eta_j(y),$$

et enfin une fonction quelconque de x et y sous la forme :

$$\sum \alpha_i \xi_i(x) \eta_k(y).$$

On aura en effet :

$$f(x, y) = \sum \alpha_i \xi_i(x) \eta_k(y),$$

en faisant :

$$\alpha_{ik} = \iint \eta_i(x) \xi_k(y) f(x, y) dx dy.$$

Cela posé, je dis que les relations (1) suffisent pour caractériser les fonctions fondamentales de seconde sorte η_i , quand on connaît celles de la première sorte, c'est-à-dire les ξ_i . En effet, quel que soit le noyau K on pourra le mettre sous la forme :

$$K(x, y) = \sum \alpha_{ik} \xi_i(x) \eta_k(y). \quad (2)$$

Les ξ_i étant, par hypothèse, les fonctions fondamentales de la première sorte, on aura :

$$\xi_i(x) = \lambda_i S(\xi_i) = \lambda_i \int K(x, y) \xi_i(y) dy,$$

ou en remplaçant K par sa valeur (2) et tenant compte de (1) :

$$\xi_i = \lambda_i \sum_k \alpha_{ik} \xi_k(x),$$

ou en identifiant :

$$\alpha_{ii} = 0, \quad (i \neq j);$$

$$\alpha_{ii} = \lambda_i^{-1};$$

$$K = \sum \lambda_i^{-1} \xi_i(x) \eta_i(y);$$

d'où, tenant toujours compte de (1)

$$\int K(y, x) \eta_i(y) dy = \lambda_i^{-1} \eta_i(x),$$

ce qui exprime que les η_i sont bien les diverses fonctions fondamentales de la seconde sorte.

Ces résultats s'étendent, *mutatis mutandis*, au cas où l'on a affaire à des intégrales doubles, ou bien à celui où on aurait affaire non à une seule équation intégrale, mais à un système de deux équations intégrales à deux fonctions inconnues, telle que l'équation envisagée plus haut :

$$J = \lambda S(J) + T,$$

où les deux fonctions inconnues sont les deux composantes du vecteur J.

On peut remarquer aussi qu'il n'y aurait rien de changé d'essentiel si l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ admettait des racines multiples.

Faisons-en l'application au problème qui nous occupe.

Nous avons :

$$K_n = \int K(x_1, z_1) K(z_1, z_2) K(z_2, z_3) \dots \times \dots K(z_{n-1}, y) dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1},$$

$$K'_n = \int K'KK \dots K dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} + \int K'KK' \dots K dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} + \dots + \int KKK \dots K' dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1},$$

ou

$$K'_n = \sum \int K_p(x, z) K'(z, t) K_q(t, y) dz dt,$$

avec $p + q = n - 1$.

Supposons donc que nous sachions trouver les fonctions fondamentales ξ et η pour le noyau K (x, y). Nous pourrions développer K' en série procédant suivant les ξ et les η , d'où :

$$K'(x, y) = \sum \alpha_{ik} \xi_i(x) \eta_k(y).$$

On aura :

$$K'_n(x, y) = \sum \int \lambda_i^{-p} \xi_i(x) \eta_i(z) \alpha_{ik} \xi_j(z) \eta_k(t) \times \lambda_k^{-q} \xi_k(t) \eta_k(y) dz dt.$$

Intégrons d'abord par rapport à z

$$\int \eta_i(z) \xi_j(z) dz = 0 \text{ si } i \neq j,$$

et

$$= 1 \text{ si } i = j.$$

On peut de même effectuer l'intégration par rapport à t et il vient :

$$K'_n = \sum \lambda_i^{-p} \lambda_k^{-q} \alpha_{ik} \xi_i(x) \eta_k(y).$$

Mais

$$\sum \lambda_i^{-p} \lambda_k^{-q} = \frac{\lambda_i^{-p+1} - \lambda_k^{-p+1}}{\lambda_i^{-1} - \lambda_k^{-1}},$$

$$b'_n = \int K'_n(x, x) dx.$$

Il vient donc :

$$b'_n = n \alpha_{ii} \lambda_i^{-n+1}.$$

On trouverait de même :

$$K'_n = \sum \xi_i(x) \eta_k(y) \alpha_{ij} \alpha_{ik} \lambda_i^{-p} \lambda_j^{-q} \lambda_k^{-r},$$

$$b'_n = \sum \alpha_{ij} \alpha_{jk} \lambda_i^{-p} \lambda_j^{-q} \lambda_k^{-r}.$$

$$p + q + r = n - 2.$$

Si donc on a résolu le problème de l'excitation dans un cas particulier, par exemple celui d'un cylindre, d'une sphère ou d'un ellipsoïde, on pourra passer au cas d'un excitateur peu différent en appliquant les principes précédents; on formera alors la nouvelle équation $\Delta = 0$ qu'on résoudra facilement puisqu'on connaît une valeur approchée de la racine.

Supposons maintenant un excitateur formé de deux conducteurs séparés, reliés par un fil dont on néglige la capacité, et supposons

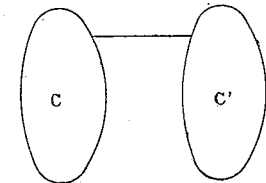


Fig. 6.

qu'on sache résoudre le problème de l'excitation pour chacun de ces deux conducteurs; il s'agit d'étendre la solution au cas de l'ensemble des deux conducteurs.

Soit K (M, M') le noyau total. Nous allons former le noyau approché de la façon suivante : nous supposons que K (M, M') est nul si les points M et M' sont sur deux conducteurs différents et que K (M, M') a la même valeur que dans le cas d'un conducteur isolé si M et M' sont sur un même conducteur.

Si on sait résoudre ce problème approché, on pourra trouver par la méthode précédente la solution complète, car K (M, M') est évidemment notablement plus grand quand M et M' sont sur le même conducteur que lorsque ces points sont sur des conducteurs différents.

Dans ce cas, nous trouverons que $b'_n = 0$ et ε est de l'ordre de l'induction mutuelle des deux conducteurs.

Comme autre exemple, supposons un con

ducteur cylindrique ayant une section très petite par rapport à sa longueur. Nous prendrons, comme première approximation, un cylindre indéfini et nous pourrions particulariser la solution du problème en supposant que la perturbation est périodique le long de ce cylindre indéfini qu'on pourra partager en sections d'égale longueur. Le noyau approché est alors dû à l'action sur le point M d'un point M' quelconque du conducteur indéfini, situé ou non sur la même section que le point M. Dans le cas exact du conducteur limité, le noyau K (M, M') aura la même valeur que précédemment si M et M' sont sur la section de cylindre considérée, et sera nul si M et M' sont sur des sections différentes du cylindre illimité.

Ces deux cas sont évidemment peu différents l'un de l'autre car, dans le cas du cylindre illimité, K (M, M') est évidemment notablement plus grand quand M et M' sont sur la même section que lorsque M et M' sont sur des sections différentes.

On peut encore considérer un conducteur filiforme mais courbe et prendre comme solution approchée le même conducteur rectifié (et devenu ainsi cylindrique comme celui qu'on vient de traiter). Comparons les deux noyaux K (M, M') relatif au fil courbe et K' (M, M') relatif au fil droit. Si les deux points M et M' appartiennent à deux sections très voisines du fil, les deux noyaux différeront très peu l'un de l'autre puisqu'une petite longueur d'une courbe peut être assimilée à une droite. Si les deux points M et M' appartiennent à deux sections éloignées, les deux noyaux seront l'un et l'autre relativement très petits, puisque la distance des deux

points sera très grande par rapport à la section du fil.

Nous étudierons donc d'abord le problème de l'excitation dans le cas du cylindre indéfini; de là nous passerons facilement au cas du conducteur cylindrique limité et ensuite à un faisceau de cylindres; nous nous rapprocherons ainsi des formes d'antennes utilisées en pratique.

§ 14. — REMARQUE. — Quelle est la signification des ξ et η dans le problème qui nous occupe?

Considérons un conducteur quelconque. Soit f, g, h , le champ électrique,

α, β, γ le champ magnétique.

Ces deux champs satisfont aux équations générales du champ électromagnétique et sont proportionnels à $e^{i\omega t}$.

Je suppose que tant à l'extérieur qu'à l'intérieur du conducteur : $u = v = w = p = 0$.

Je ne suppose pas ici que le champ soit nul à l'intérieur du conducteur, mais il éprouvera une discontinuité en traversant la surface.

Pour les fonctions fondamentales de la première sorte, g, h, α sont continus; f, β, γ sont discontinus, la discontinuité les multipliant par un facteur constant ϵ .

Pour les fonctions de la deuxième sorte c'est le contraire : f, β, γ sont continus et g, h, α sont discontinus et multipliés par ϵ .

On le voit immédiatement pour les fonctions de la première sorte qui satisfont à l'équation :

$$J = \lambda_i S(J).$$

Pour démontrer la propriété énoncée au sujet des fonctions de la seconde sorte, je renverrai à l'appendice, à la fin de ce travail.

(A suivre.) H. POINCARÉ.

LA RÉACTANCE SYNCHRONE ET ASYNCHRONE (1)

Dans l'étude précédente, nous avons établi tous les calculs de la réactance d'un alternateur avec rotor à pôles continus, 1 500 tours, 50 périodes, 4 pôles.

A présent nous continuons sur un alternateur avec rotor à pôles saillants de même

élevée de 500 périodes, ayant donc 40 pôles.

La première machine a un arc polaire de grand développement : 812 millimètres, tandis que la seconde a son arc très réduit : 43 millimètres seulement.

Comme nous le verrons plus loin, la dis-

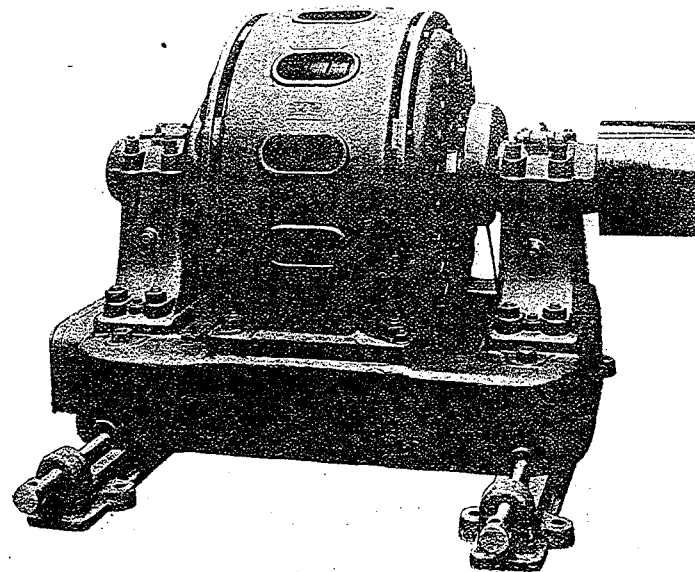


Fig. 1.

vitesse (1 500 tours), mais à la fréquence

persion d'une machine avec si faible arc polaire atteint une valeur telle qu'il est indispensable, pour son établissement, d'en faire les calculs complets et ceci surtout pour une machine à haute tension.

(1) Voir sur ce sujet les articles de M. J. REZELMAN déjà parus dans la *Lumière Électrique* (2^e série) :

La détermination de la réactance synchrone et asynchrone, t. XI, p. 355 et 389.

La réactance synchrone et asynchrone, t. XII, p. 195, 291 et 323.

Voir aussi les études antérieures de l'auteur (t. VI, VII, IX et X) qui servent d'introduction à la question.

Alternateur monophasé de 75 K.V.A. à 40 pôles, 3 600 volts, 500 périodes, 1 500 tours par minute (fig. 1).

D'autre part, M. Clinton a modifié le montage d'Hutchinson; cette modification, qui conduit à essayer la génératrice à tension et excitation constantes, repose sur une analyse fort intéressante du phénomène et se présente comme très pratique et très sûre.

L'usage, en traction électrique, de *sabots de frein* en fer avec mortaises remplies de ciment aurait, d'après les documents publiés en Amérique, donné des résultats excellents : suppression du grincement, augmentation de la durée d'utilisation, etc.

M. Zickler donne une méthode de détermination rapide des dimensions rationnelles à donner à une *batterie-tampon*, afin qu'elle soit capable de réduire dans les proportions voulues la variation dans la tension provenant d'un à-coup de courant.

L'auteur établit, en même temps que le diagramme du courant de la batterie, un abaque qui permet le calcul pour différentes durées et différents sens de la fluctuation. En dernier lieu, il cite le dispositif employé par la Compagnie Siemens-Schuckert pour réduire au minimum les effets de l'à-coup.

L'approfondissement du lit de la Weser, dans la traversée de la ville de Brême, a nécessité l'établissement, en amont de cette

ville, d'un barrage et d'un système d'écluses comportant deux canaux parallèles et d'inégale longueur.

A cause de la longueur de la grande écluse, et pour effectuer un service rapide, on a eu recours au *halage électrique*, mais il n'était pas possible d'employer une locomotive ordinaire.

On a dû recourir à un appareil tracteur en forme de portique, dont M. O. Tuch donne la description, indique les caractéristiques mécaniques et électriques, et grâce auquel on peut assurer un éclusage rapide dans chacun des deux canaux.

L'étude de M. L. Odendall sur la *production du cuivre dans l'Amérique du Nord* contient, outre les quelques chiffres que nous avons déjà publiés tout récemment, des données remarquablement précises sur l'activité économique des différentes compagnies, l'importance de leur personnel, etc... Nous avons tenu, en les reproduisant aujourd'hui, à compléter en quelques mots le tableau d'ensemble ébauché dans notre dernier extrait.

Nos Notes industrielles contiennent enfin la description d'une *lampe à arc à courant alternatif* accompagnée de données photographiques, mises sous la forme de courbes et de tableaux intéressants au point de vue des applications pratiques de l'éclairage électrique.

SUR DIVERSES QUESTIONS RELATIVES A LA TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

(Suite) (1).

DÉTERMINATION A PRIORI
DE LA LONGUEUR D'ONDE ET DE L'AMORTISSEMENT
D'UN EXCITATEUR DE FORME DONNÉE (suite).

§ 15. — Nous avons donné dans de précédentes conférences (2), les équations générales du champ électromagnétique dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Soient x', y', z' les nouvelles coordonnées, x, y, z , les coordonnées rectilignes.

Je suppose que l'on ait :

$$ds^2 = a^2 dx'^2 + b^2 dy'^2 + c^2 dz'^2.$$

Par exemple, dans le cas des coordonnées semi-polaires, nous aurons :

$$\begin{cases} x = x', & a = 1, \\ y = y' \cos z', & b = 1, \\ z = y' \sin z'. & c = y'. \end{cases}$$

Dans le cas des coordonnées polaires, nous aurons :

$$\begin{cases} x = x' \cos y', & a = 1, \\ y = x' \sin y' \cos z', & b = x', \\ z = x' \sin y' \sin z'. & c = x' \sin y'. \end{cases}$$

Soient :

$$\begin{array}{cc} FGH & F'G'H' \\ f'g'h & f'g'h \\ a\beta\gamma & a'\beta'\gamma' \end{array}$$

les projections du potentiel vecteur, du champ électrique et du champ magnétique dans les deux systèmes de coordonnées. Nous avons :

$$F'dx' + G'dy' + H'dz' = Fdx + Gdy + Hdz,$$

$$a' = \frac{a}{bc} \left(\frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'} \right),$$

$$4\pi \frac{df'}{dt} = \frac{a}{bc} \left(\frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{d\beta'}{dz'} \right),$$

(en supposant qu'il n'y ait pas de courant de conduction),

$$4\pi f' = - \frac{dF'}{dt} - \frac{dy'}{dx'}$$

et enfin :

$$\Sigma \frac{d}{dx'} \left(a' \frac{bc}{a} \right) = 0$$

(en supposant qu'il n'y ait pas d'électricité libre),

$$\Sigma \frac{d}{dx'} \left(a' \frac{bc}{a} \right) = 0.$$

Telles sont les équations dont nous allons nous servir.

Ici, la surface du conducteur sera :

$$x' = C^{te}.$$

Quand nous franchirons la surface, γ' et β' seront multipliés par ε , de même que leurs dérivées prises le long de la surface du conducteur.

$\frac{df'}{dt}$ et par suite f' seront aussi multipliés par ε .

§ 16. — Cas du conducteur cylindrique indéfini. — Adoptons les coordonnées semi-polaires,

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = y'.$$

Il n'y a maintenant aucun inconvénient à supprimer les accents; c'est ce que nous ferons dans ce qui va suivre.

On a :

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{b}{ac} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{c}{ab} = y'.$$

Je puis supposer le courant dirigé suivant les génératrices du cylindre.

Alors : $G' = H' = 0$.

(1) Voir *Lumière Electrique*, 7 et 14 janvier 1911.

(2) *Lumière Electrique* (2^e série), t. IV, 1908, n° 48 et suivants.

D'autre part, tout étant de révolution autour de Ox ,

$$\frac{d}{dz} = 0.$$

Les équations deviennent dans ce cas-ci :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= -y \frac{dF}{dy}. \end{aligned}$$

Toutes les fonctions étant proportionnelles à $e^{i\omega t}$, on a :

$$4\pi i \omega f = \frac{1}{y} \frac{d\gamma}{dy} = -\frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{dF}{dy},$$

$$h = 0,$$

$$4\pi i \omega g = \frac{d^2 F}{dy dx},$$

$$4\pi g = -\frac{d\psi}{dy}.$$

On satisfait à l'équation obtenue en égalant les deux valeurs de g , en posant :

$$i\omega\psi = -\frac{dF}{dx}.$$

C'est ici que nous devons introduire l'hypothèse de la périodicité de F , F devant reprendre la même valeur dans les diverses sections du cylindre indéfini. F est proportionnel à e^{imx} .

$$i\omega \frac{d\psi}{dx} = -\frac{d^2 F}{dx^2} = m^2 F$$

(à cause de la forme de la fonction F).

Mais :

$$4\pi f = -i\omega F - \frac{d\psi}{dx},$$

ou :

$$4\pi i \omega f = \omega^2 F - m^2 F.$$

Remplaçons dans l'équation précédemment obtenue; il vient :

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dF}{dy} + (\omega^2 - m^2) F = 0.$$

Telle est l'équation à laquelle satisfait F .

C'est une équation de Bessel; parmi les solutions de cette équation que l'on sait obtenir, nous en retiendrons deux: l'une J_0 restant finie pour $y = 0$, l'autre I_0 qui, à l'infini, se comporte très sensiblement comme la fonction :

$$e^{-iy\sqrt{\omega^2 - m^2}}.$$

Quelle est celle de ces deux solutions qu'il convient d'adopter ?

Si on considère le champ à l'extérieur du cylindre, F se présente sous la forme d'un potentiel retardé de la forme: $\frac{e^{i\omega r}}{r}$; c'est donc la solution I_0 qu'il convient d'adopter.

Donc à l'extérieur du cylindre, au facteur près $e^{i\omega t + imx}$,

$$F = I_0(y).$$

À l'intérieur, il faut prendre :

$$F = J_0(y),$$

car, pour $y = 0$, la fonction doit se comporter régulièrement.

Comment trouver les fonctions fondamentales de la première et de la deuxième sortes ?

On sait que les fonctions fondamentales de la première sorte sont caractérisées par ce fait que la composante normale du champ magnétique et la composante tangentielle du champ électrique sont continues, tandis que la composante tangentielle du champ magnétique et la composante normale du champ électrique sont multipliées par un facteur constant qui est: $\frac{1 + 2\pi\lambda}{1 - 2\pi\lambda}$ comme on peut le voir facilement.

En effet, J est défini par :

$$J = \lambda S(J);$$

$S(J)$ est égal à la moyenne $\frac{\beta_0 + \beta_1}{2}$ des champs extérieur et intérieur, J à la densité superficielle $\frac{\beta_0 - \beta_1}{4\pi}$.

Donc :

$$\frac{\beta_0 - \beta_1}{4\pi} = \lambda \frac{\beta_0 + \beta_1}{2},$$

d'où :

$$\beta_0 = \beta_1 \left(\frac{1 + 2\pi\lambda}{1 - 2\pi\lambda} \right).$$

Or la composante tangentielle du champ magnétique γ est proportionnelle à $\frac{dF}{dy}$.

La composante tangentielle du champ électrique f est proportionnelle à F .

Donc F doit être continu et par conséquent: à l'extérieur du conducteur :

$$F = \frac{I(y)}{I(y_0)} \quad (y_0, \text{ rayon du cylindre});$$

à l'intérieur du conducteur :

$$F = \frac{J(y)}{J(y_0)}.$$

$\frac{dF}{dy}$ devant être multiplié par le facteur $\frac{1 + 2\pi\lambda}{1 - 2\pi\lambda}$, on a :

$$\frac{I'(y_0)}{I(y_0)} = \frac{1 + 2\pi\lambda}{1 - 2\pi\lambda} \frac{J'(y_0)}{J(y_0)}.$$

Si nous voulons avoir la période propre de l'excitateur, il faudra que $\beta_1 = 0$, c'est-à-dire :

$$1 - 2\pi\lambda = 0$$

et par suite :

$$I(y_0) = 0$$

ou :

$$J'(y_0) = 0.$$

Les solutions de cette équation entière par rapport à ω donneront la longueur d'onde et l'amortissement.

Pour les fonctions fondamentales de la deuxième sorte, $\frac{dF}{dy}$ doit être continu et F

multiplié par un facteur constant: $\frac{1 - 2\pi\lambda}{1 + 2\pi\lambda}$.

Donc, à l'extérieur du cylindre :

$$F = \frac{I(y)}{I'(y_0)},$$

à l'intérieur :

$$F = \frac{J(y)}{J'(y_0)},$$

avec la condition :

$$\frac{I(y_0)}{I'(y_0)} = \frac{1 - 2\pi\lambda}{1 + 2\pi\lambda} \frac{J(y_0)}{J'(y_0)}.$$

C'est la même équation définissant λ .

§ 17. — Cas de la sphère. — Prenons des coordonnées polaires :

$$\begin{cases} a = r, \\ b = x, \\ c = x \sin y, \end{cases}$$

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{x^2 \sin y}, \quad \frac{b}{ac} = \frac{1}{\sin y}, \quad \frac{c}{ab} = \sin y.$$

Nous avons donc les équations :

$$\alpha = \frac{1}{x^2 \sin y} \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{\sin y} \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right),$$

$$\gamma = \sin y \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right),$$

$$4\pi i \omega f = \frac{1}{x^2 \sin y} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right),$$

$$4\pi i \omega g = \frac{1}{\sin y} \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right),$$

$$4\pi i \omega h = \sin y \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right).$$

Nous allons chercher une solution particulière de ces équations. Nous supposons :

$$G = H = 0,$$

c'est-à-dire que le potentiel vecteur est dirigé suivant le rayon vecteur issu du centre de la sphère. Il ne peut en être ainsi, en général, si le potentiel est engendré par des courants

superficiels; mais F, G, H et ψ ne sont pas des quantités définies expérimentalement; les équations du champ ne suffisent pas à les déterminer entièrement, car ces équations ne changent pas si on change F, G, H et ψ en :

$$F + \frac{d\psi}{dx}, \quad G + \frac{d\psi}{dy}, \quad H + \frac{d\psi}{dz}, \quad \psi - \frac{d\psi}{dt},$$

et pour achever de déterminer F, G, H, ψ , nous avons ajouté l'équation :

$$\sum \frac{dF}{dx} + \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

qui définit le potentiel de Lorentz.

J'abandonne donc ici cette équation. A vrai dire, elle ne cesse pas d'être satisfaite à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur, mais elle cesserait de l'être sur la couche superficielle.

Puisque nous supposons $G = H = 0$, nous avons :

$$\alpha = 0, \\ \beta = \frac{1}{\sin y} \frac{dF}{dz}, \\ \gamma = -\sin y \frac{dF}{dy},$$

$$4\pi i \omega f = \frac{1}{x^2 \sin y} \left(-\cos y \frac{dF}{dy} - \sin y \frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{1}{\sin y} \frac{d^2 F}{dz^2} \right) \\ = -\frac{D(F)}{x^2},$$

en posant :

$$D(F) = \frac{1}{\sin y} \left(\cos y \frac{dF}{dy} + \sin y \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{1}{\sin y} \frac{d^2 F}{dz^2} \right),$$

$$4\pi i \omega g = \frac{d^2 F}{dx dy} = -i \omega \frac{d\psi}{dy},$$

$$4\pi i \omega h = \frac{d^2 F}{dx dz} = -i \omega \frac{d\psi}{dz}.$$

On est ainsi amené à poser :

$$i \omega \psi = -\frac{dF}{dx}$$

Par conséquent :

$$i \omega \frac{d\psi}{dx} = -\frac{d^2 F}{dx^2},$$

$$4\pi i \omega f = \omega^2 F + \frac{d^2 F}{dx^2}.$$

En égalant les valeurs de $4\pi i \omega f$, nous obtenons l'équation :

$$\omega^2 F + \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{D(F)}{x^2} = 0.$$

Pour satisfaire à cette équation, nous prendrons :

$$F = J(x) \cdot P(y, z).$$

L'équation devient :

$$\omega^2 J P + J'' P + \frac{J D(P)}{x^2} = 0.$$

On y satisfait en posant :

$$D(P) = k P.$$

Il vient alors :

$$\omega^2 J + J'' + \frac{k J}{x^2} = 0.$$

Quelle valeur convient-il d'attribuer à k ? L'équation :

$$D(P) = k P$$

est une équation connue, définissant les fonctions sphériques à la condition de poser :

$$k = -n(n+1).$$

Si on attribue à k une valeur différente, il serait impossible de satisfaire à cette équation par une fonction uniforme et finie de y et z .

P est alors la fonction sphérique d'ordre n et l'équation qui définit J présente un rapport manifeste avec l'équation de Bessel. Nous distinguerons 2 intégrales : l'une $J(x)$ qui reste finie pour $x = 0$ et l'autre $I(x)$ qui se comportera sensiblement comme e^{-ix} pour x très grand. Quelle est celle de ces solutions qui convient?

A l'intérieur de la sphère je prendrai $J(x)$, car la fonction doit rester finie pour $x=0$.

A l'extérieur de la sphère, il faut prendre $I(x)$ car le champ est produit par un potentiel retardé de la forme :

$$\frac{M e^{-i \omega r}}{r}.$$

Il reste à déterminer :

1^o Les fonctions fondamentales de la première et de la deuxième sortes;

2^o La période propre de la sphère.

Pour les fonctions de la première sorte, le champ magnétique tangentiel (β, γ) est discontinu et multiplié par le facteur constant :

$$\frac{1 + 2\pi\lambda}{1 - 2\pi\lambda}.$$

Le champ électrique tangentiel (g, h) est continu.

Donc :

$$\frac{d^2 F}{dx dy} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 F}{dx dz}$$

sont continus; ils le seront si $\frac{dF}{dx}$ est continu.

Donc :

$$F = \frac{I(x)}{I'(x_0)} \quad \text{à l'extérieur de la sphère,}$$

$$F = \frac{J(x)}{J'(x_0)} \quad \text{à l'intérieur.}$$

Pour $x = x_0$, F est discontinu et multiplié par $\frac{1 + 2\pi\lambda}{1 - 2\pi\lambda}$:

$$\frac{I(x_0)}{I'(x_0)} = \frac{1 + 2\pi\lambda}{1 - 2\pi\lambda} \frac{J(x_0)}{J'(x_0)}.$$

Pour avoir la période propre de l'excitateur sphérique, je fais $\lambda = \frac{1}{2\pi}$.

D'où :

$$I'(x_0) = 0.$$

Telle est l'équation qui définit la longueur d'onde et l'amortissement.

Les fonctions $I(x)$ et $J(x)$ sont définies par une équation du second ordre. On voit de suite, par des considérations d'homogénéité, que I et J vont être fonctions de ωx car, en posant dans l'équation différentielle $x = \frac{x'}{\omega}$, ω disparaîtrait.

Ce sont des fonctions entières de ωx , développables en séries analogues aux séries de Bessel, convergeant avec une très grande rapidité.

L'équation dépend de k et par conséquent de l'entier n .

Soient I_n et J_n les déterminations particulières des fonctions I et J correspondant à un entier n déterminé. A chacun de ces systèmes correspondra un système d'oscillations particulier et l'amortissement sera donné par l'équation :

$$I'_n(\omega x_0) = 0.$$

Comme x_0 est donné, cette fonction définira ω .

On peut se demander si nous avons épuisé de la sorte toutes les solutions possibles, c'est-à-dire si toute vibration possible de la sphère peut être obtenue en combinant les vibrations simples.

Il y a une autre catégorie de vibrations qui donnent d'ailleurs les mêmes longueurs d'onde.

En effet, entre les équations du champ écrites plus haut, éliminons les potentiels; nous obtenons :

$$i \omega a' = \frac{a}{bc} \left(\frac{d \cdot 4\pi h'}{dy'} - \frac{d \cdot 4\pi g'}{dz'} \right),$$

$$4\pi i \omega f' = \frac{a}{bc} \left(\frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{dh'}{dz'} \right),$$

Ces équations présentent une symétrie évidente. On passe d'un système à l'autre en permutant :

$$\begin{matrix} a' & \beta' & \gamma' \\ 4\pi f' & 4\pi g' & 4\pi h'. \end{matrix}$$

Si on possède une solution du problème, on peut en déduire immédiatement une autre par cette permutation. Nous avons trouvé tout à l'heure un système de solutions caractérisé par $\alpha' = 0$. En faisant la permutation, nous obtiendrons une autre solution caractérisée par $\alpha'' = 0$.

REMARQUE. — Il est à peine besoin de faire remarquer que, dans la nouvelle solution, les

quantités jouant le rôle de F, G, H, ψ , n'ont plus aucune signification physique (*).

(A suivre.) H. POINCARÉ.

(*) Le complément de cette étude se trouve dans la *Lumière Électrique*, 18 et 25 juin et 2 juillet 1910 : H. POINCARÉ. « Sur la diffraction des ondes hertziennes ». Voir aussi pour le développement des calculs de ce dernier problème : *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, tome XXIX (1910, 1^{er} semestre).

SUR LES MÉTHODES DIFFÉRENTIELLES DE KAPP ET D'HUTCHINSON

Le principal défaut de la méthode de Kapp est que les deux dynamos se trouvent, au point de vue des pertes, dans des conditions très différentes.

La génératrice travaille à une induction moyenne dans l'entrefer sensiblement plus élevée que le moteur; la différence des tensions réellement induites est en effet égale à la somme des chutes ohmiques dans les deux machines.

Par contre, le moteur est traversé par un courant plus intense que la génératrice et a par suite des pertes par effet Joule plus importantes.

Un semblant de compensation a bien lieu par conséquent, mais il dépend uniquement des conditions d'établissement des machines, c'est-à-dire, au fond, de celles des pertes auxquelles on donne la prédominance suivant le mode de service : pertes dans le fer ou pertes dans le cuivre.

On connaît la méthode indiquée par M. F. Loppé (*) pour tenir compte de l'inégalité des pertes de même genre dans les deux dynamos et consistant à combiner la méthode de Kapp, ou une méthode différentielle quelconque, avec celle des pertes séparées, de façon à obtenir par différence les pertes non évaluables par la méthode indirecte. On partage ensuite

(*) F. LOPPÉ. *Les essais industriels des machines électriques et des groupes électrogènes*.

ces pertes supplémentaires suivant une loi que son auteur modifia, du reste, et qui consista tout d'abord en une répartition proportionnelle aux puissances fournies par les deux machines, puis en une répartition proportionnelle aux puissances à vide pour les tensions réellement induites en charge.

La modification que le professeur Drysdale (*) propose pour la méthode de Kapp est, en quelque sorte, la contre-partie de celle de M. Loppé.

Elle suppose en effet, en somme, que les pertes restent pratiquement les mêmes dans les deux machines pour toutes les charges.

M. Drysdale fait tout d'abord une mesure à vide, c'est-à-dire avec l'excitation génératrice réglée de façon à ce que la dynamo correspondante ne débite aucun courant. La puissance consommée ainsi est alors attribuée par moitié à chacune des deux dynamos.

Dans les essais, avec différents régimes, qui suivent, l'augmentation de puissance fournie par le réseau, à partir de celle consommée pour l'essai à vide, est répartie proportionnellement aux carrés des courants circulant dans les induits des deux dynamos.

En opérant de cette façon, on obtiendra évidemment des résultats d'autant plus voisins de la réalité que les pertes dans le fer

(*) *The Electrician*, 3 juin 1910, p. 322.

induit auront moins d'importance par rapport aux pertes par effet Joule. La distorsion du champ et les pertes supplémentaires qui en résultent dans le fer induit et celles par courants de Foucault dans les pièces polaires contribuent aussi à rendre la méthode plus exacte, bien que ces pertes ne soient pas seulement fonction du carré du courant induit.

Les essais faits par M. Drysdale sur deux dynamos de faible puissance par cette méthode et par une méthode directe, avec emploi de frein ou de dynamomètre, ont donné en effet des résultats très sensiblement identiques si l'on tient compte de la précision des mesures dans ces sortes d'essais, même lorsqu'on y procède avec des instruments de laboratoire.

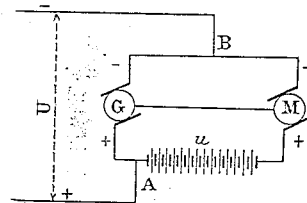


Fig. 1.

La modification que M. W. C. Clinton (*) apporte à la méthode de Hutchinson repose sur les considérations suivantes :

Deux montages sont possibles avec cette dernière méthode, en adoptant des excitations séparées et égales, suivant que la tension du réseau, supposée constante, est appliquée directement aux bornes de la génératrice (fig. 1) ou du moteur (fig. 2).

Si l'induit du moteur est monté aux bornes du réseau, on réalise évidemment les conditions de fonctionnement normales d'un moteur shunt. Dans ce cas, la tension aux bornes de la génératrice et la vitesse de l'ensemble diminuent lorsque la charge augmente sur le moteur par suite de l'augmentation de la tension de la génératrice auxi-

(*) *The Electrician*, 15 avril 1910, p. 11.

liaire (ou de la batterie) en série avec la génératrice :

Si, au contraire, l'induit de la génératrice est disposé aux bornes du moteur, cette génératrice fonctionnera bien à potentiel constant, mais la vitesse de l'ensemble, ce qui est également une des conditions de fonctionnement normal de la machine, augmentera avec la charge, ainsi que la tension aux bornes du moteur.

Pour remédier à ce dernier inconvénient, M. Clinton propose d'essayer la machine génératrice pour une vitesse et une excitation constantes. Il faut alors (fig. 3) ou employer deux survolteurs, un dans chaque circuit moteur ou génératrice, ou une batterie d'accumulateurs et disposer la connexion

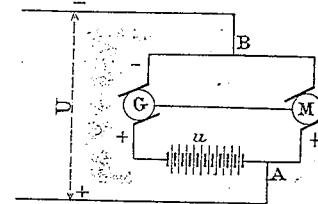


Fig. 2.

en un point convenable de la batterie.

Si l'on désigne par E_m et E_g les forces électromotrices réellement induites, par I_m et I_g les courants dans le moteur et la dynamo, par R la résistance des induits, par u_m et u_g les tensions aux bornes des deux parties de la batterie ou des survolteurs et, enfin, par U la tension aux bornes du réseau, on a :

$$U = E_g - rI_g + u_g,$$

$$U = E_m + rI_m - u_m.$$

Pour que la vitesse reste constante, il faut évidemment que E_g dépasse U de la même quantité que U dépasse E_m . On doit donc avoir :

$$u_g - rI_g = u_m - rI_m; \quad (1)$$

d'où :

$$u_m - u_g = r(I_m - I_g) = ri,$$

i étant le courant fourni par le réseau.

l'étude du magnétisme, a résumé en quelques lignes les résultats les plus saillants qu'ont obtenus récemment MM. Hadfield et Hopkinson, en observant les propriétés magnétiques du fer et de ses alliages dans les champs intenses.

Ces savants ont étudié particulièrement l'influence du silicium, de l'aluminium, du manganèse.

Nous reproduisons très largement une étude de M. J. Liska sur le calcul des électro-aimants à courants alternatifs.

Après avoir rappelé l'expression générale de la force portante et ses valeurs particulières dans le cas du courant alternatif simple, du courant continu ou du courant triphasé, l'auteur étudie plus spécialement le cas d'un électro-aimant triphasé.

Il établit les expressions de la force portante, de l'intensité et du décalage, en tenant compte des fuites et de la résistance ohmique des bobines.

M. Liska aborde alors le problème de la détermination des dimensions d'un électro-aimant triphasé, détermine l'échauffement,

le nombre des courses qu'il sera possible de faire effectuer à l'armature par unité de temps et il termine en appliquant cette théorie à un exemple numérique.

Nous avons publié, en leur temps, des descriptions partielles de quelques stands de l'Exposition de Bruxelles. Mais nous ne pensons pas que cette grande manifestation industrielle doive seulement donner lieu à de simples notes enregistrant l'actualité au fur et à mesure qu'elle s'impose. Elle comporte des enseignements qui doivent être mûris.

C'est dans cet ordre d'idées que nous avons réservé, pour une étude ultérieure approfondie, l'étude de la technique des machines; tandis qu'on trouvera, actuellement, sous la signature de M. H. Pécheux, une revue rapide et nécessairement très incomplète de tout ce qui ne concerne pas exclusivement les machines.

Nous y avons joint une série de renseignements particuliers sur le stand de la Compagnie des Compteurs.

SUR DIVERSES QUESTIONS RELATIVES A LA TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

(Suite et fin) (1).

APPENDICE

Je voudrais justifier en quelques mots ce que j'ai dit au sujet des fonctions fondamentales de première et de deuxième sorte dans le problème des ondes hertziennes; il nous suffira de vérifier qu'en définissant ces fonctions comme je l'ai fait page 38, on retrouve bien des relations fondamentales analogues à :

$$\int \xi_i \eta_i dx = 1,$$

$$\int \xi_i \eta_k dx = 0.$$

Je vais commencer par démontrer un théorème analogue à celui de Green.

Considérons un premier champ C_1 où f_1, g_1, h_1 représentent le champ électrique, et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ le champ magnétique et un second champ C_2 où les mêmes quantités sont représentées par $f_2, g_2, h_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Ces deux champs sont supposés réguliers à l'intérieur d'une surface fermée S .

Soit $d\tau$ un élément de la surface S et l, m, n ses cosinus directeurs; considérons la différence des deux intégrales

$$J_1 - J_2 = \int \begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} d\tau - \int \begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ f_1 & g_1 & h_1 \end{vmatrix} d\tau.$$

Le déterminant sous le premier signe \int représente la surface du parallélogramme construit sur les projections des vecteurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et f_2, g_2, h_2 sur le plan tangent à la surface S . Si donc les deux champs C_1 et C_2 étaient identiques, les deux intégrales J_1 et J_2 deviendraient identiques entre elles et identiques à l'intégrale de Poynting.

(1) Voir *Lumière Electrique*, 7, 14 et 21 janvier 1911.

L'intégration par parties nous donnera alors :

$$J_1 = \int \Sigma \frac{d}{dx} (\beta_1 h_2 - \gamma_1 g_2) d\tau,$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\tau$ du volume limité par S . Cela peut s'écrire :

$$J_1 = \int \left[\Sigma f_2 \left(\frac{d\gamma_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dz} \right) + \Sigma \alpha_1 \left(\frac{dg_2}{dz} - \frac{dh_2}{dy} \right) \right] d\tau.$$

Mais

$$\frac{d\gamma_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dz} = 4\pi \frac{df_1}{dt} = 4\pi i \omega f_1,$$

$$\frac{dg_2}{dz} - \frac{dh_2}{dy} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \alpha_2,$$

si les deux champs sont supposés, comme plus haut, proportionnels à $e^{i\omega t}$. Il vient donc :

$$J_1 = \int d\tau \left(4\pi \Sigma f_1 f_2 + \frac{1}{4\pi} \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \right).$$

On trouve de même :

$$J_2 = \int d\tau \left(4\pi \Sigma f_2 f_1 + \frac{1}{4\pi} \Sigma \alpha_2 \alpha_1 \right).$$

D'où :

$$J_1 = J_2.$$

Ce résultat subsiste-t-il quand les champs C_1 et C_2 sont supposés réguliers non plus à l'intérieur, mais à l'extérieur de S . Cela n'est pas évident, puisque nos fonctions ne tendent pas vers zéro quand on s'éloigne indéfiniment. Pour démontrer le théorème, il faut alors faire une digression sur la possibilité de développer les trois composantes d'un champ en séries dépendant des fonctions sphériques. Soient ξ, η, ζ les trois composantes d'un vecteur quelconque, soit P_n un

polynôme sphérique quelconque, c'est-à-dire un polynôme homogène de degré n satisfaisant à $\Delta P_n = 0$.

Posons :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Sigma x P_n R + \Sigma S \frac{dP_n}{dx} + \Sigma T \left(\frac{z dP_n}{dy} - \frac{y dP_n}{dz} \right) \\ \eta &= \Sigma y P_n R + \Sigma S \frac{dP_n}{dy} + \Sigma T \left(\frac{x dP_n}{dz} - \frac{z dP_n}{dx} \right) \\ \zeta &= \Sigma z P_n R + \Sigma S \frac{dP_n}{dz} + \Sigma T \left(\frac{y dP_n}{dx} - \frac{x dP_n}{dy} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

R, S et T étant fonctions seulement de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nous trouverons :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma x \xi &= \Sigma P_n r^2 R + \Sigma n S P_n, \\ \Sigma \frac{d\xi}{dx} &= \Sigma P_n \left[(n+3)R + rR' + \frac{nS}{r} \right], \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} &= \Sigma \left(R - \frac{S'}{r} \right) \left(z \frac{dP_n}{dy} - y \frac{dP_n}{dz} \right) \\ &+ \Sigma \left[T(n+1) \frac{dP_n}{dx} + rT' \frac{dP_n}{dx} - \frac{nxT'}{r} P_n \right] \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\Sigma x \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) = \Sigma P_n n(n+1)T. \quad (4)$$

R' et S' sont les dérivées de R et S par rapport à r .

Une fonction quelconque peut toujours être représentée par une série de la forme :

$$\Sigma P_n U_n,$$

où U_n est une fonction de r ; donc, quel que soit le vecteur ξ, η, ζ , on pourra toujours développer

$$\Sigma x \xi, \quad \Sigma \frac{d\xi}{dx}, \quad \Sigma x \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right)$$

sous la forme (2) et (4). Pour en déduire que ξ, η, ζ peuvent être mis sous la forme (1), il suffit d'observer que

$$\Sigma x \xi, \quad \Sigma \frac{d\xi}{dx}, \quad \Sigma x \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right)$$

ne peuvent être nuls sans que ξ, η, ζ le soient également. En effet,

$$\Sigma x \xi = 0$$

signifie que le vecteur ξ, η, ζ est tangent à la sphère de centre O;

$$\Sigma x \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \right) = 0$$

signifie que circulation de ce vecteur à la surface de la sphère est nulle, c'est-à-dire que

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

est une différentielle exacte dV , tant que le point x, y, z reste sur la surface de la sphère; enfin

$$\Sigma \frac{d\xi}{dx} = 0$$

signifie que la convergence du vecteur est nulle, d'où l'on déduit que, à la surface de la sphère, la fonction V ne peut avoir ni maximum, ni minimum; elle est donc constante, c'est-à-dire que le vecteur est nul.

Cela posé, les divers termes de (1) correspondent aux diverses solutions particulières envisagées page 69 et suivantes.

En effet si l'on a :

$$f = x P_n R + S \frac{dP_n}{dx},$$

avec

$$(n+3)R + rR' + \frac{nS'}{r} = 0,$$

il vient, à un facteur constant près :

$$\alpha = \left(R - \frac{S'}{r} \right) \left(z \frac{dP_n}{dy} - y \frac{dP_n}{dz} \right),$$

ce qui montre que la composante radiale du champ magnétique est nulle. On retombe sur une des solutions particulières de la page 69.

Si l'on a, au contraire,

$$\alpha = x P_n R + S \frac{dP_n}{dx},$$

avec

$$(n+3)R + rR' + \frac{nS'}{r} = 0,$$

il vient à un facteur constant près :

$$f = \left(R - \frac{S'}{r} \right) \left(z \frac{dP_n}{dy} - y \frac{dP_n}{dz} \right),$$

ce qui montre que la composante radiale du champ électrique est nulle; on retombe alors sur l'une des solutions particulières de la page 72.

Ainsi, un champ quelconque peut toujours être développé en série procédant suivant les solutions particulières des pages 69 et 72, et que nous appellerons des solutions simples.

Cela posé, revenons à notre objet; l'équation

$$J_1 = J_2$$

est-elle encore vraie pour des champs réguliers à l'extérieur de la surface S, quand cette surface est une sphère?

Supposons d'abord que les champs C_1 et C_2 correspondent à des solutions simples.

Supposons que le champ C_1 corresponde à une solution de la première espèce (solution de la page 69); on aura :

$$\alpha_1 = T_1 \left(z \frac{dP_n}{dy} - y \frac{dP_n}{dz} \right),$$

$$4\pi i \omega f_1 = \frac{d\gamma_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dz}$$

$$= -\frac{nxT_1}{r} P_n + [rT_1' + (n+1)T_1] \frac{dP_n}{dx},$$

$$\alpha_1 = \frac{4\pi}{i\omega} \left(\frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} \right)$$

$$= \frac{1}{\omega^2} \left[-\frac{nT_1}{r} - \frac{T_1'(n+1)}{r} - \frac{T_1'}{r} - T_1'' \right],$$

d'où :

$$T_1'' + \frac{2(n+1)T_1'}{r} + \omega^2 T_1 = 0. \quad (5)$$

Si le champ C_2 correspond à une solution de même espèce, on aura des formules analogues en remplaçant T_1 par T_2 et n par m .

Si le champ C_1 ou le champ C_2 correspondent à une solution de l'autre espèce, on pourra encore se servir des mêmes formules, mais en permutant α, β, γ avec $4\pi f, 4\pi g,$

$4\pi h$. Cela posé, il est aisé de voir que l'intégrale $J_1 - J_2$ peut se mettre sous la forme

$$\alpha \int S d\omega,$$

α étant une fonction de r seulement, tandis que au contraire est une fonction homogène, de degré zéro, de x, y, z , et ne change pas, par conséquent, quand on s'éloigne de l'origine en suivant un rayon vecteur; quant à

$$d\omega = \frac{d\tau}{r^2},$$

c'est l'angle solide sous lequel on voit de l'origine l'élément $d\tau$ de la surface de la sphère; l'intégration, bien entendu, est étendue à tous les éléments de cette surface.

Si les deux solutions correspondant au champ C_1 et C_2 sont de même espèce, on aura

$$S = r^p \Sigma \left(z \frac{dP_n}{dy} - y \frac{dP_n}{dz} \right) \left(z \frac{dP_m}{dy} - y \frac{dP_m}{dz} \right),$$

p étant un entier négatif, choisi de telle sorte que S soit homogène de degré zéro, soit

$$p = -m - n.$$

Si les deux solutions C_1 et C_2 sont d'espèce différente, on aura

$$S = r^{p+q} \left[\frac{x}{dx} \frac{y}{dy} \frac{z}{dz} \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_n}{dy} \frac{dP_n}{dz} \right] + \dots$$

Le théorème est vrai pour un espace qui ne s'étend pas à l'infini et, en particulier, pour l'espace compris entre deux sphères concentriques; on aura donc

$$J_1 - J_2 = [J_1 - J_2]_s = 0,$$

si S et S' sont ces deux sphères concentriques; en d'autres termes,

$$J_1 - J_2 = \alpha \int S d\omega$$

est indépendante de r . Cela ne peut arriver que si

$$\int s d\omega = 0,$$

auquel cas on a $J_1 = J_2$, et le théorème est démontré, ou si $\alpha = \text{Const}$. Mais qu'est-ce que α ? C'est une combinaison homogène et du second degré des deux fonctions T_1 et T_2 et de leurs dérivées, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de r . Qu'est-ce que T_1 ? C'est une des intégrales de l'équation (5) et, celle qui nous convient, c'est celle qui, pour r très grand, est sensiblement proportionnelle à

$$e^{-i\alpha r} r^k,$$

où k est un exposant constant qu'il est inutile de déterminer. Il en sera de même pour T_2 ; il en résulte que, pour r très grand, α est sensiblement proportionnel à

$$e^{-2i\alpha r} r^l,$$

où l est un exposant constant. α ne peut donc être une constante sans être nul et on a encore

$$J_1 - J_2 = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Si le théorème est démontré quand les deux champs C_1 et C_2 sont deux solutions simples, il le sera toujours, puisque nous avons vu qu'un champ quelconque est décomposable en solutions simples.

Supposons enfin que S soit une surface quelconque, et soit S' une sphère enveloppant complètement S . Le théorème est vrai pour l'espace compris entre S et S' puisque cet espace ne s'étend pas à l'infini. On a donc

$$(J_1 - J_2)_S - (J_1 - J_2)_{S'} = 0.$$

Mais nous venons de voir qu'il est vrai pour la sphère; on a donc

$$(J_1 - J_2)_{S'} = 0;$$

d'où:

$$(J_1 - J_2)_S = 0,$$

ce qui exprime que le théorème est général.

Cela posé, considérons un champ C_1 , jouissant des propriétés suivantes:

1^o A l'extérieur comme à l'intérieur de S , le champ est régulier;

2^o Quand on traverse la surface S , la composante tangentielle du champ électrique, comme la composante normale du champ magnétique, est continue;

3^o Quand on passe de l'extérieur à l'intérieur, en traversant la surface S , la composante normale du champ électrique, comme la composante tangentielle du champ magnétique, est multipliée par un facteur constant ε_1 .

Un pareil champ satisfait à la condition:

$$J = \lambda_1 S (J), \quad \varepsilon_1 = \frac{1 + 2\pi\lambda_1}{1 - 2\pi\lambda_1};$$

c'est donc une de nos fonctions fondamentales de la première sorte.

Envisageons ensuite un champ C_2 , jouissant des propriétés inverses.

1^o Le champ est régulier tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S ;

2^o Quand on traverse S , la composante tangentielle du champ magnétique, comme la composante normale du champ électrique, est continue;

3^o Quand on passe de l'extérieur à l'intérieur, en traversant S , la composante normale du champ magnétique, de même que la composante tangentielle du champ électrique, est multipliée par un facteur constant ε_2 .

Nous allons appliquer notre théorème tant au volume intérieur à S qu'à l'espace extérieur; nous formerons nos intégrales J_1 et J_2 et nous distinguerons par exemple l'intégrale J_1^e relative au côté extérieur de S et l'intégrale J_1^i relative au côté intérieur. Nous aurons:

$$J_1^e = \int \begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha_1^e & \beta_1^e & \gamma_1^e \\ f_1^e & g_1^e & h_1^e \end{vmatrix} d\sigma,$$

$$J_1^i = \int \begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha_1^i & \beta_1^i & \gamma_1^i \\ f_1^i & g_1^i & h_1^i \end{vmatrix} d\sigma,$$

α_1^e représentant par exemple la première composante du champ magnétique du côté externe et α_1^i la même composante du côté interne. On observera que les composantes tangentielles des deux champs interviennent seules dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

qui figure sous le signe \int . Tout se passe donc comme si l'on avait:

$$\alpha_1^i = \varepsilon_1 \alpha_1^e, \dots, \\ f_1^i = \varepsilon_1 f_1^e, \dots;$$

d'où:

$$J_1^i = \varepsilon_1 J_1^e.$$

Dans l'intégrale J_2 , au contraire, figurent seulement la composante tangentielle du champ magnétique C_2 et celle du champ électrique C_1 ; tout se passera donc comme si l'on avait:

$$\alpha_2^i = \alpha_2^e, \dots, \\ f_1^i = f_1^e, \dots;$$

d'où:

$$J_2^i = J_2^e.$$

Mais, en vertu du théorème démontré plus haut,

$$J_1^i = J_2^i, \\ J_1^e = J_2^e.$$

On aura donc

$$J_1^e = J_2^e = J_1^i = J_2^i = 0,$$

sauf dans les cas où l'on aurait $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$.

Revenons alors à notre équation de Fredholm et répétons le raisonnement de la page 36.

En chaque point M de la surface S et dans le plan tangent, nous choisissons deux axes rectangulaires; nous désignons par X et Y les projections du vecteur J sur ces deux axes, par X_1 et Y_1 celles du vecteur $S (J)$, par X' et Y' celles du vecteur J' sur les axes

choisis de la même façon dans le plan tangent au point M' . On a alors:

$$X_1 = \int d\sigma' [\mathcal{X} (M, M') X' + \mathcal{L} (M, M') Y'],$$

$$Y_1 = \int d\sigma' [\mathcal{Y} (M, M') X' + \mathcal{L}' (M, M') Y'].$$

($d\sigma'$ est l'élément de la surface S dont le centre est en M').

Ce sont les quatre fonctions $\mathcal{X}, \mathcal{L}, \mathcal{Y}, \mathcal{L}'$ qui définissent le noyau (*vide supra*, p. 9) et il s'agit de les former. Considérons maintenant l'un des champs C_1 , c'est-à-dire l'une des fonctions fondamentales de la première sorte; soient ξ_1^2 et $-\xi_1^2$ les projections de la force magnétique correspondante sur les deux axes choisis dans le plan tangent au point M . Le vecteur $S (J)$ n'étant autre chose que la composante tangentielle du champ magnétique que l'on a fait tourner de 90° , ses projections sur les mêmes axes seront ξ_1^1 et ξ_1^2 ; on aura d'ailleurs, pour le champ C_1 ,

$$J = \lambda_1 S (J),$$

λ_1 étant une constante liée à celle que nous avons appelée ε_1 par une relation très simple.

Considérons maintenant le champ C_2 (c'est-à-dire nos fonctions fondamentales de la deuxième sorte) et soient η_k^1 et η_k^2 les projections de la force électrique correspondante sur les mêmes axes. L'équation

$$J_1^e = 0$$

peut alors s'écrire:

$$\int (\xi_1^1 \eta_k^1 + \xi_1^2 \eta_k^2) d\sigma = 0. \quad (1)$$

Elle est vraie toutes les fois que l'on n'a pas

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1.$$

Si l'on a $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$, nous supposons que les indices ont été choisis de telle sorte que $i = k$. Cela suppose qu'il n'y a qu'un seul champ C_2 qui corresponde à cette valeur de ε_2 , c'est-à-dire que λ_1 est une racine simple

de $\Delta(\lambda) = 0$. Il serait aisé de voir ce qu'il y aurait à faire si l'on avait des racines multiples, mais cela m'entraînerait trop loin.

Nous pouvons alors, en multipliant ξ_r ou η_k par un facteur constant convenable, nous arranger de telle façon que

$$\int (\xi_r^2 \eta_r^2 + \xi_r^2 \eta_r^2) d\sigma = 1. \quad (2)$$

L'analogie des formules (1) et (2) avec les formules de la page 38 est évidente. Cherchons donc à mettre les fonctions $\mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(M, M') &= \sum a_{ik} \xi_k^i(M) \eta_k^i(M'), \\ \mathcal{L} &= \sum a_{ik} \xi_k^i(M) \eta_k^i(M'), \\ \mathcal{M} &= \sum a_{ik} \xi_k^i(M) \eta_k^i(M'), \\ \mathcal{N} &= \sum a_{ik} \xi_k^i(M) \eta_k^i(M'), \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (1) et (2)

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \int \int [\mathcal{J} \xi_k^i(M) \xi_k^i(M') + \mathcal{L} \eta_k^i(M) \xi_k^i(M') \\ &+ \mathcal{M} \eta_k^i(M) \xi_k^i(M') + \mathcal{N} \eta_k^i(M) \xi_k^i(M')] d\sigma d\sigma'. \end{aligned}$$

Mais les fonctions ξ satisfaisant à l'équation

$$\mathcal{J} = \lambda_i S(\eta),$$

on a :

$$\xi_k^i(M) = \lambda_k \int [\mathcal{J} \xi_k^i(M') + \mathcal{L} \xi_k^i(M')] d\sigma'$$

$$\xi_k^2(M) = \lambda_k \int [\mathcal{M} \xi_k^i(M') + \mathcal{N} \xi_k^i(M')] d\sigma'$$

d'où :

$$a_{ik} = \lambda_k^{-1} \int (\xi_k^i \eta_i^i + \xi_k^2 \eta_i^2) d\sigma$$

c'est-à-dire :

$$a_{ii} = \lambda_i^{-1}, \quad a_{ik} = 0, \quad (i \neq k).$$

On aura donc :

$$\mathcal{J}(M, M') = \sum \lambda_i^{-1} \xi_i^i(M) \eta_i^i(M'), \quad \text{etc}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int [\mathcal{J} \eta^i(M) + \mathcal{M} \eta^i(M')] d\sigma \\ = \sum \lambda_k^{-1} \eta_k^i(M) \int (\xi_k^i \eta_i^i + \xi_k^2 \eta_i^2) d\sigma = \lambda_i^{-1} \eta_i^i(M') \end{aligned}$$

et de même :

$$\int [\mathcal{L} \eta^i(M) + \mathcal{N} \eta^i(M')] d\sigma = \lambda_i^{-1} \eta_i^i(M'),$$

ce qui prouve que les fonctions η sont bien les fonctions fondamentales de la seconde sorte (1).

H. POINCARÉ.

(1) Conférences faites à l'Ecole Supérieure des Postes et des Télégraphes, rédigées par M. GILES.

L'ENSEIGNEMENT DE L'ELECTRICITE A L'INSTITUT POLYTECHNIQUE RENSSELAER (NEW-YORK)

LE NOUVEL INSTITUT DE MÉCANIQUE
ET D'ÉLECTRICITÉ RUSSELL SAGE

Nous avons vu (1) que, en dehors des grandes universités américaines possédant des

(1) L. FABRE, L'enseignement de l'électricité à l'Institut Polytechnique de Worcester (Massachusetts), *Lumière Electrique*, tome VII (2^e série), p. 105.

sections techniques où la science de l'ingénieur se trouve développée dans tous ses détails, il existe de très importants établissements supérieurs d'enseignement technique, remarquablement outillés et qui sont fréquentés par un très grand nombre d'étudiants répartis comme l'indique le tableau I. L'Institut Polytechnique Rensselaer, éta-

bli à Troy (N.-Y.), compte pour l'un des plus anciens. Il fut en effet fondé en 1824, en vue de l'enseignement des mathématiques, de la physique, de la chimie, de la géologie et de l'histoire naturelle et de leurs applications techniques, industrielles ou agricoles. Durant les onze premières années, cette Ecole s'occupa surtout d'histoire naturelle et délivra des diplômes de bachelier ès arts. En 1835, elle confère le titre d'ingénieur civil; en 1849, elle prend le titre d'Institut Polytechnique et, avec quelques changements de programme, son enseignement

sais, etc., l'Institut Williams Proudft, pour les essais de résistance des matériaux techniques; un bâtiment particulier avec fonderie, forge, atelier mécanique, machines-outils, menuiserie et modèlerie; l'Hôtel Ranken, siège de l'Association chrétienne des jeunes gens de l'Institut, le dortoir, le gymnase, la maison des anciens élèves.

Enfin, pour l'enseignement pratique de la mécanique et de l'électricité, l'Institut Rensselaer a inauguré en juin 1909 le très important Institut Russell Sage, dû aux libéralités de Mme Russell Sage qui, en souvenir de son

TABLEAU I. — Statistique de quelques Instituts Techniques Américains.

	Institut Polytechnique de Rensselaer (Troy, N.-Y.)	Ecole Technologique Clarkson (Potsdam)	Institut Polytechnique de Brooklyn (N.-Y.)	Institut Polytechnique Worcester (Mass.)	Institut Polytechnique Ross (Indiana)	Institut Polytechnique Virginia (Blacksbury)	Institut de Technologie Armour (Chicago)	Institut de Technologie Massachusetts (Boston)
Etudiants diplômés.....	68	»	71	18	2	22	»	186
4 ^e année.....	59	11	37	80	48	62	83	208
3 ^e année.....	66	13	44	103	45	85	113	187
2 ^e année.....	91	25	55	132	55	169	135	211
1 ^{re} année.....	293	47	36	153	64	139	245	276
Etudiants spéciaux.....	30	1	19	»	»	5	46	568
Total.....	609	97	341	488	214	482	622	1 604
A déduire: Elèves comptés 2 fois.....			64					
Total.....			519	Académie Scientifique..... 269				
Etudiants suivant les cours de perfectionnement sous les auspices de l'Association des Instituteurs de Brooklyn et de l'Institut Polytechnique de Brooklyn.....			302	Classes du soir..... 798				
Total.....			821	Cours d'été..... 222				
				A déduire: Elèves comptés 2 fois..... 41				
				Total..... 1 869				
				1 415				

pratique se trouve, en 1907, développé dans quatre divisions : Génie Civil, Mécanique, Electricité et Histoire Naturelle.

En plein centre industriel, à proximité des usines, manufactures, hauts fourneaux, minoteries et ateliers les plus importants de New-York, l'Institut occupe huit bâtiments, spécialement outillés pour les besoins de la pratique moderne et de ses nombreux progrès.

Nous trouvons l'Institut Carnegie qui contient les salles de dessin, d'examen et de cours, l'Institut de chimie Walker avec ses nombreux laboratoires, salles spéciales d'es-

mari, ancien administrateur de l'Institut, a fait don de 5 millions de francs, en vue de la construction, de l'installation et de l'organisation des splendides laboratoires qui le constituent.

L'inauguration officielle eut lieu sous la présidence de MM. Palmer Ricketts, président de l'Institut Rensselaer; Robert de Forest, représentant Mme Sage; Jesse M. Smith, président de la Société américaine des ingénieurs mécaniciens, et L.-B. Stillwell, président de l'Institut américain des ingénieurs électriciens.