LETTRES D'HENRI POINCARÉ À M. MITTAG-LEFFLER.[1]

. . . . . Caen, 1 Juin 1881.

Je vous remercie bien de votre lettre et, loin de vous en vouloir, je suis enchanté du moyen que vous me fournissez de rectifier une erreur historique. N'ayant pas lu le mémoire Zur Funktionenlehre,[2] j'attribuais à M. HERMITE la première idée de ce nouveau genre de fonctions. La manière de définir une fonction, page 3, je ne la croyais pas nouvelle, car je la qualifie de «*Procédé bien connu*». Je la considérais comme étant passée dans le domaine public depuis CAUCHY; quant à la série:

$$A + \Sigma b^\nu x^{a^\nu}$$

je ne la regardais pas non plus comme nouvelle, mais si on m'avait demandé de qui elle était, je crois que j'aurais dit: de LEJEUNE-DIRICHLET ou de DU BOIS-REYMOND. Vous voyez par là combien mes connaissances historiques étaient imparfaites et combien vous m'avez été utile. Je ne regrette qu'une chose, c'est que vous ayez fait commencer l'impression avant de m'écrire, car cela rendra les corrections plus difficiles.

En ce qui concerne la série:

$$s = x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \cdots + x^n\varphi(n) + \cdots$$ [3]

je ne puis dire que je m'en suis occupé le premier, puisqu'elle ressemble à tel point aux séries envisagées par JACOBI dans la théorie des fonctions elliptiques;

[1] Les trois lettres de 1 juin 1881, de 29 juin 1881 et de 26 juillet 1881 se rapportent au page 94 du mémoire de CH. HERMITE «Sur quelques points de la théorie des fonctions» (Extrait d'une lettre de M. CH. HERMITE à M. MITTAG-LEFFLER), Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, Tome XII, 1883 (imprimé 1881), Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 91, p. 77—78, ainsi qu'au mémoire de H. POINCARÉ «Sur les fonctions à espaces lacunaires», Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, Tome XII, 1883. (imprimé 1881)

[2] Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, p. 719—743; Mathematische Werke von KARL WEIERSTRASS, Bd. 2, p. 201—223.

[3] $\varphi(n)$ représente la somme des puissances $(\lambda - 1)^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de n.

mais je ne puis non plus dire qu'on s'en est occupé avant moi; car les deux séries sont *presque* les mêmes sans être *tout à fait* les mêmes.

Voici au surplus comment j'y ai été conduit: Soit:

$$S = \Sigma_{m,n}(am + bn)^{-\lambda};$$

m et n prennent sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières, positives et négatives, sauf:

$$m = n = 0$$

λ est un entier plus grand que 2.

Posons

$$x = e^{\frac{2\pi b\sqrt{-1}}{a}}$$

on trouve:

$$a^\lambda S = A + Bs$$

A et B étant des constantes dont je ne me rappelle plus la valeur.[1] De la forme de la série S se déduit immédiatement la propriété indiquée de la série s.

Voici maintenant comment je conçois le rapport entre la série s et les séries de Jacobi. La fonction modulaire est une *fonction fuchsienne;* parmi les fonctions fuchsiennes il y en a une autre que j'appelle *fonction arithmétique* qui s'exprime rationnellement par la fonction modulaire. Toute fonction rationnelle de la fonction modulaire s'exprime par le quotient de deux fonctions analogues aux fonctions Θ et que j'appelle *thêtafuchsiennes modulaires;* de même toute fonction rationnelle de la f. arithmétique s'exprime par le quotient de deux fonctions *thêtafuchsiennes arithmétiques.* Eh bien les séries de Jacobi sont des fonctions thêtafuchsiennes modulaires, les séries s sont des fonctions thêtafuchsiennes arithmétiques. Vous me demandez un exemple de fonctions fuchsiennes présentant un espace lacunaire; presque toutes celles que j'ai étudiées jusqu'ici présentent un tel espace. Je vous citerai seulement comme exemple la fonction modulaire qui vous est bien connue; ou bien encore la fonction définie de la manière suivante:

Envisageons l'équation hypergéométrique de Gauss et je suppose que la différence des racines des équations déterminantes soient des parties aliquotes de 1.

Si on envisage la variable comme fonction du rapport des intégrales, ce sera une fonction fuchsienne présentant un espace lacunaire.

---

[1] Si λ est un nombre pair on trouve

$$A = (-1)^{\frac{\lambda}{2}+1} \frac{B_\lambda}{\lambda!} (2\pi)^\lambda, \quad B = 2(-1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{(2\pi)^\lambda}{(\lambda-1)!},$$

où les B_λ représentent les nombres de Bernoulli. Si λ est un nombre impair la somme de la série S est égale à zéro et la relation indiquée entre S et s ne subsiste pas en ce cas.

Je ne sais quand je publierai en détail mes recherches sur ces sortes de fonctions fuchsiennes; mais je puis vous donner quelques détails sommaires.

Je cherche toutes les fonctions uniformes de z qui satisfont à des relations telles que celles-ci:

$$F(z) = F\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) = F\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) = \cdots = F\left(\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right);$$

les a, b, c, d sont réels; je les suppose donnés. Seulement ils ne peuvent être choisis d'une façon quelconque et le problème le plus difficile est de déterminer comment on doit les choisir pour qu'il existe de telles fonctions. Je le résous à l'aide de considérations empruntées à la géométrie non-euclidienne.

J'ai surtout à faire ressortir les analogies avec les fonctions elliptiques; j'ai trouvé des fonctions rappelant à certains points de vue les fonctions Θ et Z; j'ai montré comment on pouvait les appliquer à l'intégration des équations linéaires, au calcul des intégrales abéliennes et à diverses questions d'arithmétique.

J'ai lieu de penser que toutes les équations linéaires à coefficients rationnels s'intègrent par ma méthode; mais je ne l'ai pas encore démontré rigoureusement.

Vous me demandez aussi quelques détails sur cette fonction qui intègre l'équation (8); c'est bien simple; d'après la forme de cette équation, il y a une série ordonnée suivant les puissances des u qui satisfait à l'équation et il n'y en a qu'une; c'est cette série, considérée comme fonction du paramètre x, qui est la fonction à espace lacunaire à étudier. Quant à un exemple, voici le plus simple que je puisse donner; c'est l'équation:

$$u_1 \frac{dz}{du_1} + (x - \alpha_2) u_2 (1 - u_1) \frac{dz}{du_2} + (x - \alpha_3) u_3 \frac{dz}{du_3} + \cdots + (x - \alpha_n) u_n \frac{dz}{du_n} = z$$

dont l'unique intégrale holomorphe est à un facteur numérique près:

$$\sum \frac{m_2^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_1} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_n^{m_n}}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m_1} [m_1 - \mu + (x - \alpha_2) m_2 + (x - \alpha_3) m_3 + \cdots + (x - \alpha_n) m_n]}.$$

Vous verrez d'ailleurs dans le texte la rectification que j'ai faite.

. . . . .

. . . . . Caen, le 29 juin 1881.

Il y a en effet une erreur dans l'exemple que je vous ai envoyé. La seule intégrale holomorphe de l'équation serait évidemment:

$$z = u_1 \times \text{constante}.$$

Je vais prendre un exemple différent et faire tout le calcul pour éviter toute erreur nouvelle. Soit:

$$u_1(1-u_1-u_2-u_2u_3)\frac{dz}{du_1}+\lambda_2u_2\frac{dz}{du_2}+\lambda_3u_3\frac{dz}{du_3}=z.$$

S'il y a une intégrale holomorphe, on obtiendra le coëfficient de $u_1^{m_1}u_2^{m_2}u_3^{m_3}$ en différentiant m_1 fois par rapport à u_1, m_2 fois par rapport à u_2, puis m_3 fois par rapport à u_3 et faisant:

$$u_1=u_2=u_3=0.$$

Je pose pour abréger:

$$\frac{dz}{du_1}=p_1,\ \frac{dz}{du_2}=p_2,\ \frac{dz}{du_3}=p_3;\quad D_1U=\frac{d^{m_1}U}{du_1{}^{m_1}};$$

$$D_2U=\frac{d^{m_2}U}{du_2{}^{m_2}};\quad D_3U=\frac{d^{m_3}U}{du_3{}^{m_3}};\quad D=D_1D_2D_3z.$$

Je différentie d'abord m_2 fois par rapport à u_2; il vient:

$$u_1(1-u_1-u_2-u_2u_3)D_2p_1+\lambda_2u_2D_2p_2+\lambda_3u_3D_2p_3-$$
$$-m_2u_1(1+u_3)\frac{d^{m_2-1}p_1}{du_2^{m_2-1}}+m_2\lambda_2D_2z=D_2z.$$

Je fais $u_2=0$ et je différentie m_1 fois par rapport à u_1; il vient:

$$u_1(1-u_1)D_1D_2p_1+[m_1(1-u_1)-m_1u_1]D_1D_2z+\lambda_3u_3D_1D_2p_3-$$
$$-m_2u_1(1+u_3)D_1\frac{d^{m_2-1}p_1}{du_2^{m_2-1}}-m_1m_2(1+u_3)D_1\frac{d^{m_2-1}z}{du_2^{m_2-1}}+$$
$$+m_2\lambda_2D_1D_2z-m_1(m_1-1)D_2\frac{d^{m_1-1}z}{du_1^{m_1-1}}=D_1D_2z.$$

Je fais $u_1=0$

$$m_1D_1D_2z+\lambda_3u_3D_1D_3p_3-m_1m_2(1+u_3)D_1\frac{d^{m_2-1}z}{du_2^{m_2-1}}+$$
$$+m_2\lambda_2D_1D_2z=D_1D_2z+m_1(m_1-1)D_2\frac{d^{m_1-1}z}{du_1^{m_1-1}}.$$

Je différentie m_3 fois par rapport à u_3; il vient:

$$(m_1 + \lambda_2 m_2 - 1) Dz + \lambda_3 u_3 D p_3 - m_1 m_2 (1 + u_3) D_1 D_3 \frac{d^{m_2-1} z}{d u_2^{m_2-1}} +$$

$$+ m_3 \lambda_3 Dz - m_1 m_2 m_3 D_1 \frac{d^{m_2+m_3-2} z}{d u_3^{m_3-1} d u_2^{m_2-1}} = m_1 (m_1 - 1) D_2 D_3 \frac{d^{m_1-1} z}{d u_1^{m_1-1}}.$$

J'appelle:

$$\frac{(m_1, m_2, m_3)}{m_1!\, m_2!\, m_3!} \text{ le coëfficient de } u_1^{m_1} u_2^{m_2} u_3^{m_3};$$

l'équation précédente me donne:

$$(m_1, m_2, m_3)(m_1 + m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 - 1) = m_1 m_2 (m_1, m_2 - 1, m_3) +$$

$$+ m_1 m_2 m_3 (m_1, m_2 - 1, m_3 - 1) + m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 1, m_2, m_3).$$

Cette équation montre comment on pourra calculer les coëfficients de proche en proche.

Soit d'abord $m_1 = 1$; $m_2 = m_3 = 0$; l'équation est indéterminée; on peut prendre un coëfficient quelconque, prenons 1; soit maintenant $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$ l'équation devient:

$$(1, 1, 0)(1 + \lambda_2 - 1) = 1,$$

soit $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$; on a:

$$(1, 1, 1)(\lambda_2 + \lambda_3) = (1, 0, 1) + (1, 0, 0), \quad (1, 0, 1)\lambda_3 = 0, \quad (1, 1, 1) = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3};$$

$$(1, 2, 1)(2\lambda_2 + \lambda_3) = 2(1, 1, 1) + 2(1, 1, 0),$$

$$(1, 2, 1) = \frac{2}{(\lambda_2 + \lambda_3)(2\lambda_2 + \lambda_3)} + \frac{2}{\lambda_2 (2\lambda_2 + \lambda_3)};$$

$$(2, 0, 0) = 2(1, 0, 0) = 2;$$

$$(2, 1, 0)(1 + \lambda_2) = 2(2, 0, 0) + 2(1, 1, 0) = 4 + \frac{2}{1 + \lambda_2 - 1},$$

etc.

. . . . .

Paris, le 26 juillet 1881.

Si vous voulez bien, je vais prendre un autre exemple très simple, et calculer seulement les premiers termes de l'intégrale. Je prends deux variables seulement u_1 et u_2; soit:

$$u_1(1+u_2)\frac{dz}{du_1}+u_2\lambda_2\frac{dz}{du_2}=z.$$

. . . . . j'obtiens par la méthode des coefficients indéterminés . . . . .

$$z=u_1-\frac{u_1u_2}{\lambda_2}+\frac{u_1u_2^2}{2\lambda_2^2}-\frac{u_1u_2^3}{6\lambda_2^3}+\cdots.$$

On pourrait évidemment trouver l'intégrale de la façon suivante; posant

$$z=tu_1$$

il vient:

$$t(1+u_2)+u_1(1+u_2)\frac{dt}{du_1}+u_2\lambda_2\frac{dt}{du_2}=t,$$

dont une intégrale s'obtient simplement en posant:

$$t+\lambda_2\frac{dt}{du_2}=0,$$

d'où:

$$t=e^{-\frac{u_2}{\lambda_2}}.$$

de sorte que l'intégrale holomorphe s'écrit:

$$z=u_1e^{-\frac{u_2}{\lambda_2}} \text{ multiplié par une constante.}$$

Dans cet exemple, en posant ensuite

$$\lambda_2=x-\alpha_2$$

comme je le fais dans ma note, on n'aurait pas d'espace lacunaire. Cela n'arriverait que dans des cas plus compliqués. Mais ce qui précède suffira, je pense, pour vous faire comprendre comment il faudrait conduire le calcul dans tous les cas possibles. . . . . .

. . . . . Caen, le 1 Août 1881.

Permettez-moi de vous envoyer encore une exemple relatif à notre équation

$$\Sigma u_i F_i \frac{dz}{du_i} = z \tag{1}$$

exemple qui mettra bien en lumière la nature et les propriétés de l'intégrale.

Je suppose, vous vous le rappelez, que, *quand on annule tous les* u, $F_1, F_2, \ldots F_n$ se réduisent respectivement à

$$1, x - \alpha_2, \ldots x - \alpha_n.$$

Je pose:

$$z = t u_1$$

d'où:

$$\frac{dz}{du_i} = u_1 \frac{dt}{du_i}; \quad \frac{dz}{du_1} = t + u_1 \frac{dt}{du_1}.$$

L'équation (1) va devenir, en supposant $n = 3$ pour fixer les idées:

$$u_1 F_1 \frac{dt}{du_1} + u_2 F_2 \frac{dt}{du_2} + u_3 F_3 \frac{dt}{du_3} = t(1 - F_1).$$

Je pose maintenant:

$$t = e^v$$

d'où

$$\frac{dt}{du_i} = e^v \frac{dv}{du_i};$$

l'équation (1) devient alors:

$$u_1 F_1 \frac{dv}{du_1} + u_2 F_2 \frac{dv}{du_2} + u_3 F_3 \frac{dv}{du_3} = 1 - F_1$$

ou en posant:

$$\frac{F_2}{F_1} = \varphi_2; \quad \frac{F_3}{F_1} = \varphi_3; \quad \frac{1 - F_1}{F_1} = \varphi,$$

$$u_1 \frac{dv}{du_1} + u_2 \varphi_2 \frac{dv}{du_2} + u_3 \varphi_3 \frac{dv}{du_3} = \varphi.$$

Quand on annule tous les u, les fonctions φ_2, φ_3 et φ se réduisent respectivement à:

$$x-\alpha_2,\quad x-\alpha_3,\quad 0.$$

Eh bien, je vais supposer que φ_2 et φ_3 se réduisent *identiquement* à $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$; j'aurai ainsi un exemple simple où l'intégrale s'écrira presque immédiatement.

Soit en effet:

$$\varphi=\Sigma A_{m_1.m_2.m_3}u_1^{m_1}u_2^{m_2}u_3^{m_3}$$

et écrivons que la fonction inconnue v, s'écrit:

$$v=\Sigma C_{m_1.m_2.m_3}u_1^{m_1}u_2^{m_2}u_3^{m_3}$$

on a, en identifiant:

$$C_{m_1.m_2.m_3}(m_1+m_2(x-\alpha_2)+m_3(x-\alpha_3))=A_{m_1.m_2.m_3} \tag{2}$$

ce qui donne les valeurs des C. Il n'y aurait en effet de difficulté que si l'on avait:

$$m_1+m_2(x-\alpha_2)+m_3(x-\alpha_3)=0.$$

Or dans le cas où l'origine est extérieure au triangle formé par les points 1, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$; cela ne peut arriver que si

$$m_1=m_2=m_3=0.$$

Mais alors, comme $A_{0.0.0}$ est nul, l'équation (2) se réduit à une identité.

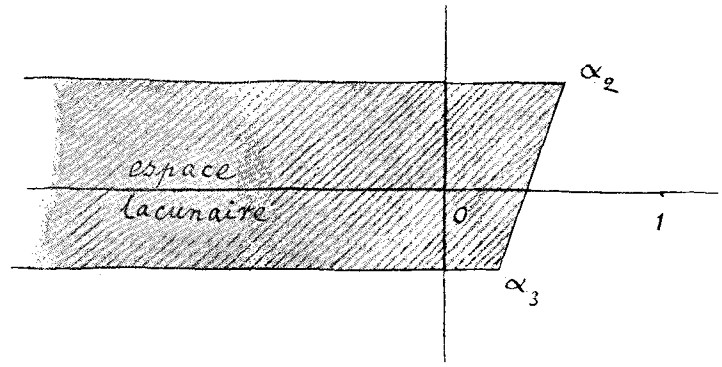
Quant à la convergence de la série, elle se démontre aisément dans le cas où l'origine est extérieure au triangle 1, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$.

On a donc une fonction v holomorphe définie par la série convergente:

$$v=\sum\frac{A_{m_1.m_2.m_3}u_1^{m_1}u_2^{m_2}u_3^{m_3}}{m_1+m_2(x-\alpha_2)+m_3(x-\alpha_3)}$$

ce qui définit en même temps une intégrale z *holomorphe* de l'équation (1).

Ces fonctions v et z présenteront un espace lacunaire déterminé par la condition que l'origine soit intérieure au triangle 1, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$. Cet espace lacunaire est limité par trois droites, dont l'une est la droite α_2, α_3 et les autres sont les parallèles à l'axe des quantités réelles menées par α_2 et α_3 dans la direction des quantités réelles négatives.



Si au lieu de supposer que F_2 et F_3 se réduisent à $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$ quand on annule tous les u, j'avais supposé que ces fonctions se réduisent à

$$\frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}, \quad \frac{x-\alpha_3}{x-\alpha_1},$$

j'aurais eu pour espace lacunaire le triangle $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$.

Vous voyez comment dans le cas simple où l'on a identiquement:

$$F_2 = F_1\,(x-\alpha_2), \quad F_3 = F_1\,(x-\alpha_3),$$

ou bien:

$$F_2 = F_1\,\frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}, \quad F_3 = F_1\,\frac{x-\alpha_3}{x-\alpha_1},$$

la question peut se traiter. Si vous le désirez d'ailleurs, je pourrai vous envoyer un exemple plus compliqué. . . . . .

. . . . . Paris, le 27 juillet 1882.

J'ai relu les mémoires de M. Schwarz pour voir si j'avais quelque chose à modifier dans la rédaction de mon historique. Ces mémoires forment une sorte de série et l'on peut y voir le développement des idées de M. Schwarz. Les voici dans l'ordre de leur publication:

Ueber einige Abbildungsaufgaben (Crelle 70), Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel (Crelle 70), Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ (Crelle 74), Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen (Monatsberichte 1870), Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Function ihres vierten Elementes darstellt (Crelle 75).

Dans cette série de mémoires, il n'y a que quelques lignes qui se rapportent à la question qui nous occupe et je les citerai textuellement tout à l'heure.

Dans le premier de ces mémoires, M. SCHWARZ cite quelques exemples d'Abbildung d'un Gebiet donné, par exemple d'une parabole, d'une ellipse, d'un polygone rectiligne, sur un cercle et il remarque que par l'intermédiaire d'une équation linéaire à coëfficients réels, on peut abbilden un cercle sur un Kreisbogenpolygon. J'ignore s'il était le premier à faire cette remarque, mais dans tous les cas, elle ne se rapporte pas à la question qui nous occupe, puisque M. SCHWARZ ne s'est nullement inquiété de savoir si la fonction qui permettait cette Abbildung était uniforme. Par conséquent, je n'ai pas cru devoir citer ce mémoire; car personne n'a jamais douté que x ne fût une fonction de z; ce qui est intéressant, c'est de savoir que cette fonction peut, dans certains cas, être uniforme. Le second mémoire Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders.... se rapporte à une intégrale $\int_0^x (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots dx$ et ne nous intéresse pas.

Dans les mémoires du Tome 74 et des Monatsberichte, M. SCHWARZ démontre le principe de DIRICHLET.

J'arrive enfin au mémoire du Tome 75. M. SCHWARZ étudie l'équation différentielle de la série de GAUSS; il appelle s le rapport des intégrales, il pose

$$\lambda = 1 - \gamma, \quad \mu = \alpha - \beta, \quad \nu = \gamma - \alpha - \beta.$$

Il examine d'abord le cas où $\lambda + \mu + \nu < 1$ et il dit:

»... Es ist daher in diesem Falle die Grösse s stets eine unendlich vieldeutige, also transcendente Function von x. Dagegen kann der Fall eintreten, dass umgekehrt x eine eindeutige Function von s ist; dies findet statt wenn $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$ ganze Zahlen sind. Es tritt jedoch hierbei der bemerkenswerthe Umstand ein, dass das Gebiet der Variablen s auf das Innere eines Kreises beschränkt ist und dass die Peripherie dieses Kreises für jenes Gebiet eine natürliche Grenze bildet, über welche hinaus eine analytische Fortsetzung des zwischen Function und Argument bestehenden Abhängigkeitsverhältnisses in dem gewöhnlichen Sinne unmöglich ist ...»[1]

[1] Dans l'édition de ses Œuvres (Gesammelte Mathematische Abhandlungen von H. A. SCHWARZ, Zweiter Band, 1890, Anmerkungen und Zusätze, S. 363) M. SCHWARZ a ajouté: »Die hier betrachteten eindeutigen analytischen Funktionen besitzen die Eigenschaft, *bei unendlich vielen linearen Transformationen ihres Argumentes in sich selbst überzugehen*«. (Voir H. POINCARÉ, Mémoires sur les fonctions fuchsiennes, § 5 ce journal, t. 1.)

M. SCHWARZ parle ensuite des fonctions modulaires, puis des cas où x est fonction rationnelle de s.

M. SCHWARZ a donc dans ce mémoire énoncé un résultat de la plus haute importance et c'est celui que j'ai cité. Il n'en donne aucune démonstration. Il y a dans la démonstration de ce résultat un point très délicat, une difficulté d'une nature spéciale; j'ignore comment M. SCHWARZ l'avait surmontée.

Ainsi en résumé, M. SCHWARZ a obtenu les deux résultats suivants. Dans une équation linéaire du 2^d^ ordre, il a regardé la variable x comme fonction du rapport z des intégrales (j'ignore s'il a eu le premier cette idée, je ne crois pas) et il a reconnu: 1° que si les coëff. de l'équation linéaire sont réels, cette fonction permet l'Abbildung d'un cercle sur un Kreisbogenpolygon; 2° que dans le cas de la série hypergéométrique et à certaines conditions, cette fonction était uniforme.

Le premier de ces résultats n'a aucun rapport avec la discontinuité des groupes. Je le citerai peut-être dans mon second mémoire où il est question des fonctions et non plus des groupes. Je pourrais n'en pas parler puisque le point important, l'uniformité, n'est pas touché, mais je préfère le faire. Dans mon premier mémoire, cette citation ne serait pas à sa place.

Quant au second résultat, c'est celui que j'ai cité et je ne vois pas ce que je pourrais changer à ma citation. Vous verrez pourtant, dans les épreuves que je vous envoie, que j'y ai ajouté une phrase destinée à faire ressortir l'importance du résultat.[1] . . . . .

. . . . . Nancy, le 6 Février 1883.

Vous me demandez quelques explications au sujet de mon mémoire sur les fonctions de deux variables. Vous me demandez d'abord pourquoi je dis que dans la partie commune aux deux régions R_0 et R_1 le rapport $\frac{N_1}{N_0}$ ne devient ni nul ni infini; c'est que je suppose que dans la région R_0 les deux fonctions holomorphes N_0 et D_0 ne s'annulent à la fois que pour des points isolés, ou si vous voulez qu'elles ne peuvent pas être toutes deux divisibles par une même fonction φ s'annulant à l'intérieur de R_0. Cette supposition est toujours permise et de plus elle est *absolument indispensable* pour la suite de la démonstration.

Voici d'ailleurs pourquoi elle est permise: Si N_0 et D_0 ont un facteur commun qui s'annule au point X_0, Y_0, il est possible de former effectivement ce

[1] Théorie des groupes fuchsiens, pag. 62. Ce journal, t. 1.

facteur et de le faire disparaître. Si N_0 et D_0 n'ont pas de facteur commun s'annulant en X_0, Y_0 il sera possible de prendre la région R_0 assez petite pour qu'il n'y ait pas de facteur commun s'annulant à l'intérieur de R_0.

Vous me demandez pourquoi un point x, y, z, t appartiendra au plus à cinq des régions R. Je ne pouvais disposer de ces régions de telle façon qu'un point appartînt au plus à quatre de ces régions. En effet considérons la partie commune à 4 régions R, elle satisfera aux 4 inégalités:

$$S_1 < 0, \ S_2 < 0, \ S_3 < 0, \ S_4 < 0. \tag{1}$$

Les quatre équations:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0,$$

auront toujours des solutions communes; dans le voisinage d'une de ces solutions il y aura des points satisfaisant aux 4 inégalités (1) et n'appartenant par conséquent à aucune autre région R que les 4 régions considérées, et des points qui satisferont aux 4 inégalités

$$S_1 > 0, \ S_2 > 0, \ S_3 > 0, \ S_4 > 0,$$

et qui n'appartiendront à aucune des 4 régions R_1, R_2, R_3, R_4 à cause de ces inégalités; ni à aucune autre région R puisqu'ils sont infiniment voisins des premiers.

Au contraire, on peut toujours disposer des régions R, de telle sorte qu'un point appartienne au moins à 1 et au plus à 5 d'entre elles. Vous pouvez aisément vous rendre compte de tout cela en considérant seulement deux dimensions en envisageant des cercles. Le nombre est alors 3 et non plus 5. Cela n'a d'ailleurs aucune importance pour ce qui suit. . . . . .

. . . . . Paris $^{20}/_1$ 1885.

Voici la solution de la question dont vous m'aviez parlé.

Soient $a_1, a_2, \dots a_n$, n des côtés du polygone R_0, $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ leurs conjugués, S_i la substitution qui change a_i en a'_i. Je dis que $S_1, S_2, \dots S_n$ sont fondamentales[1]; du moins en général et sauf une exception dont je parlerai plus loin. Je dis que S_n ne peut pas être une combinaison de $S_1, S_2, \dots S_{n-1}$. Sans cela une combinaison des n substitutions $S_1, S_2, \dots S_n$, *où* S_n *n'entrerait qu'une seule fois* se réduisait à la substitution *unité*. Ou en d'autres termes on pourrait

[1] Voir Théorie des groupes fuchsiens, pag. 10, ce journal, t. 1.

construire un contour fermé C franchissant *une seule fois* un côté homologue à a_n. Je dis que cela est impossible.

Considérons les deux extrémités A_0 et B_0 de a_n.

Il peut arriver trois cas:

1° ou bien le cycle dont fait partie le sommet A_0 a pour somme de ses angles $\frac{2\pi}{q}$ $q > 1$ et le cycle dont fait partie le sommet B_0 a pour somme de ses angles $\frac{2\pi}{p}$ $p > 1$. (Il peut arriver d'ailleurs que les deux sommets A_0 et B_0 font partie d'un même cycle, alors $p = q$ mais rien n'est changé. Alors on peut faire passer par A_0 un côté $A_0 B_1$ homologue à a_n et coupant $A_0 B_0$ sous l'angle $\frac{2\pi}{q}$, puis un côté $B_1 A_1$ homologue à a_n et coupant $A_0 B_1$ sous l'angle $\frac{2\pi}{p}$, puis un côté $A_1 B_2$ homologue à a_n et coupant $B_1 A_1$ sous l'angle $\frac{2\pi}{q}$ et ainsi de suite. De même, de l'autre côté, on construira $B_0 A_{-1}$ homologue à a_n et coupant $A_0 B_0$ sous l'angle $\frac{2\pi}{p}$ et ainsi de suite.

On aura ainsi une ligne brisée formée de côtés homologues à a_n,

$$\ldots\ldots A_2 B_2 A_1 B_1 A_0 B_0 A_{-1} B_{-1} A_{-2} \ldots\ldots$$

Cette ligne brisée sera *régulière* au point de vue de la géométrie non euclidienne, tous les sommets A_0, A_1, A_2, etc. seront sur un même cercle, tous les sommets B_0, B_1, B_2, etc. seront sur un autre cercle.

Enfin cette ligne brisée (qui sera généralement indéfinie) partagera le cercle fondamental en deux régions. Il est donc impossible qu'un contour fermé coupe a_n en un seul point, sans aller recouper la ligne brisée, c'est à dire sans recouper un côté homologue à a_n. Donc S_n ne peut s'exprimer par une combinaison de $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$.

2° cas. Les deux sommets A_0 et B_0 font partie d'un même cycle et la somme des angles de ce cycle est 2π. J'appellerai le sommet $B_0 = A_1$ pour plus de symétrie. Alors on peut construire un côté $A_1 A_2$ homologue à a_n, puis d'autres $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ etc., homologues à a_n.

Nous aurons ainsi une ligne brisée

$$\ldots\ldots A_{-2} A_{-1} A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots\ldots$$

régulière au point de vue de la géométrie non euclidienne, tous les angles sont égaux entre eux et tous les sommets sont sur un même cercle. Cette ligne brisée partage encore le cercle fondamental en deux régions. On est donc conduit à la même conclusion que dans le cas précédent.

3° cas. Les deux sommets A_0 et B_0 ne font pas partie d'un même cycle et la somme des angles du cycle dont fait partie A_0 est égale à 2π. Il y a alors exception et S_n n'est qu'une combinaison de $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$. Il arrive alors toujours qu'on peut par le procédé du § 9[1] ramener le polygone R_0 à un autre qui a deux côtés de moins.

Soit par exemple un polygone de $4p + 2$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués, dont les sommets de rang impaire forment un cycle dont la somme des angles est 2π et dont les sommets de rang pair forment un autre cycle. On peut ramener ce polygone à un autre de $4p$ côtés dont tous les sommets forment un seul cycle. . . . . .

[1] Voir ce journal, t. 1, pag. 44.