BIBLIOTHEQUE DE SYNTHESE SCIENTIFIQUE
publiée sous la direction de [illegible] ROUGIER

HENRI POINCARÉ
de l'Académie Française
et de l'Académie des Sciences

DES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE

PARIS
ETIENNE CHIRON, Éditeur
40, rue de Seine, 40

HENRI POINCARÉ

AVANT-PROPOS

*Le mémoire d'*Henri Poincaré, *qui inaugure la* Bibliothèque de synthèse scientifique, *a paru en langue anglaise dans une revue américaine* The Monist, *en janvier* 1898. *L'original français n'en a pas été conservé; la traduction qui suit s'est appliquée à retrouver, sous un anglais qui semble avoir été littéral, ce que devait être le texte initial.*

Dans ce travail, le plus considérable et le plus synthétique qu'il ait publié sur les fondements de la géométrie, Henri Poincaré *établit longuement cette thèse : la géométrie d'Euclide n'est pas* plus vraie *que celle de Lobatchefsky ou de Riemann, elle est simplement* plus commode, *par suite, en particulier, de la structure des solides naturels, qui se comportent dans leurs déplacements à peu près comme les solides idéaux considérés par Euclide. Rien n'exclut que des découvertes nouvelles — comme celle de la contraction de Lorentz — ne conduisent à préférer dans le traitement mathématique des problèmes physiques une des deux métriques non-euclidiennes. C'est ce qui* *s'est effectivement passé avec la* Théorie de la Relativité. *On sait comment Einstein en est venu à élire la géométrie de Riemann et à considérer l'espace physique — identifié par lui au champ de gravitation pur — comme un continu non-euclidien à courbure variable.* (La géométrie et l'expérience, *Gauthier-Villars, Paris* 1921). *Il nous a paru que le mémoire oublié de Poincaré reprenait, de ce fait, un regain d'actualité et d'intérêt qui justifiait sa publication, et nous l'offrons au public français comme la meilleure introduction à l'étude de la* Théorie de la Relativité, *dont d'autres volumes de notre collection viseront à donner un exposé général.*

L. R.

DES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE

Quoique j'aie déjà eu l'occasion d'exposer mes idées sur les fondements de la géométrie, il ne sera peut-être pas sans intérêt de revenir sur cette question avec de nouveaux développements et de chercher à éclaircir certains points que le lecteur peut avoir trouvés obscurs. C'est au sujet de la définition du point et de la détermination du nombre des dimensions que de nouveaux éclaircissements me paraissent le plus nécessaires ; mais cependant je crois utile de reprendre la question par le commencement.

L'ESPACE SENSIBLE

Nos sensations ne peuvent pas nous donner la notion d'espace. Cette notion est construite par l'esprit avec des éléments qui préexistent en lui, et l'expérience externe n'est pour lui que l'occasion d'exercer ce pouvoir, ou au plus un moyen de déterminer la meilleure manière de l'exercer.

Les sensations par elles-mêmes n'ont aucun caractère spatial.

Cela est évident dans le cas de sensations isolées, des sensations visuelles par exemple. Que pourrait voir un homme qui ne posséderait qu'un œil unique et immobile ? Des images différentes se formeraient sur différents points de sa rétine ; mais serait-il amené à classer ces images comme nous classons nos sensations rétiniennes actuelles ?

Supposons des images formées aux quatre points A, B, C, D de cette rétine immobile. Quelle raison aurait le possesseur de cette rétine de dire, par exemple, que la distance A B est égale à la distance C D ? Constitués comme nous le sommes, nous avons une raison pour parler ainsi, parce que nous savons qu'un *faible* mouvement de notre œil suffira pour amener en C l'image qui était en A et en D l'image qui était en B. Mais ces faibles mouvements de l'œil sont impossibles pour notre homme imaginaire et si nous lui demandions si la distance A B est égale à la distance C D, nous lui semblerions aussi ridicules que le serait pour nous une personne qui nous demanderait s'il y a plus de différence entre une sensation olfactive et une sensation visuelle qu'entre une sensation auditive et une sensation tactile.

Mais ce n'est pas tout. Supposons que deux points A et B soient très proches l'un de l'autre et que la distance A C soit très grande. Notre homme imaginaire aurait-il connaissance de la différence ? Nous la percevons, nous qui pouvons mouvoir nos yeux, parce qu'un très faible mouvement suffit pour faire passer une image d'A en B. Mais pour lui, la question de savoir si la distance A B est très petite comparée à la distance A C ne serait pas seulement insoluble, mais serait dénuée de sens.

La notion de la contiguité de deux points n'existerait donc pas pour notre homme imaginaire. La rubrique ou catégorie sous laquelle il rangerait ses sensations, si tant est qu'il les range, ne serait pas, par conséquent, l'espace du géomètre et ne serait même probablement pas continue, puisqu'il ne pourrait pas distinguer les petites distances des grandes. Et, même si elle était continue, elle ne saurait être, comme je l'ai amplement montré ailleurs, ni homogène, ni isotrope, ni à trois dimensions.

Il est inutile de répéter pour les autres sens ce que j'ai dit pour la vue. Nos sensations diffèrent les unes des autres qualitativement et ne peuvent donc avoir entre elles de commune mesure, pas plus qu'il n'y en a entre le gramme et le mètre. Même si nous ne comparons que les sensations fournies par la même fibre nerveuse, un effort considérable de l'esprit est nécessaire pour reconnaître que la sensation d'aujourd'hui est de même espèce que la sensation d'hier, mais plus grande ou plus petite ; en d'autres termes pour classer les sensations selon leur nature et ranger ensuite celles de même espèce sur une sorte d'échelle suivant leur intensité. Une pareille classification ne peut être effectuée sans une intervention active de l'esprit et l'objet de cette intervention est de rapporter nos sensations à une sorte de rubrique ou de catégorie qui préexiste en nous.

Cette catégorie doit-elle être regardée comme une « forme de notre sensibilité » ? Non, si l'on entend par là que nos sensations, considérées individuellement, ne pourraient pas exister sans elle. Elle ne nous devient nécessaire que pour comparer nos sensations, pour raisonner sur nos sensations. Elle est donc plutôt une forme de notre entendement.

Voilà donc la première catégorie à laquelle nos sensations sont rapportées. On peut se la représenter comme composée d'un grand nombre de systèmes absolument indépendants les uns des autres. De plus, elle nous permet seulement de comparer entre elles des sensations de même espèce et non de les mesurer, de percevoir qu'une sensation est plus grande qu'une autre sensation, mais non qu'elle est deux fois plus grande ou trois fois plus grande.

Combien une telle catégorie diffère de l'espace du géomètre! Dirons-nous que le géomètre introduit une catégorie tout à fait de la même espèce lorsqu'il emploie trois systèmes tels que les trois axes de coordonnées? Mais dans notre catégorie nous n'avons pas seulement trois systèmes, mais autant qu'il y a de fibres nerveuses. De plus, nos systèmes nous apparaissent comme autant de mondes séparés, fondamentalement distincts, tandis que les trois axes de la géométrie remplissent tous le même office et sont interchangeables. Enfin, les coordonnées sont susceptibles d'être mesurées et non pas seulement d'être comparées. Voyons donc comment nous pourrons nous élever de cette catégorie brute, que nous pouvons appeler l'espace sensible, à l'espace géométrique.

LE SENTIMENT DE LA DIRECTION

On dit souvent que certaines de nos sensations sont toujours accompagnées d'un sentiment particulier de la direction qui leur donne un caractère géométrique. Telles sont les sensations visuelles et musculaires. D'autres au contraire, telles que les sensations du goût et de l'odorat ne sont pas accompagnées de ce sentiment et sont, par conséquent, dénuées de tout caractère géométrique. Dans cette théorie, la notion de direction serait préexistante à toute sensation visuelle ou musculaire et en serait même la condition.

Je ne suis pas de cet avis ; demandons-nous d'abord si le sentiment de la direction forme réellement une partie constituante de la sensation. Je ne vois pas très bien comment il peut y avoir *dans* la sensation quelque chose d'autre que la sensation elle-même. Et observons de plus que la même sensation peut, selon les circonstances, exciter le sentiment de différentes directions. Quelle que soit la position du corps, la contraction du *même* muscle, le biceps du bras droit par exemple, provoquera toujours la *même* sensation musculaire ; et cependant, comme nous sommes avertis par d'autres sensations concomitantes que la position du corps a changé, nous savons aussi très bien que la direction du mouvement a changé.

Le sentiment de la direction ne fait donc pas partie intégrante de la sensation puisqu'il peut varier sans que la sensation varie. Tout ce que nous pouvons dire est que le sentiment de la direction est associé à certaines sensations. Mais qu'est-ce que cela signifie? Entendons-nous par là que la sensation est associée à quelque chose d'indéfinissable que nous pouvons nous représenter, mais qui n'est cependant pas une sensation? Non, nous voulons dire simplement que les différentes sensations qui correspondent à la même direction sont associées *les unes aux autres* et que l'une d'elles suscite les autres suivant les lois ordinaires de l'association des idées. Toute association d'idées n'est qu'un produit de l'habitude et il resterait à découvrir comment l'habitude s'est formée.

Mais nous sommes encore loin de l'espace géométrique. Nos sensations ont été classées d'une nouvelle manière : celles qui correspondent à la même direction sont groupées ensemble ; celles qui sont isolées et ne se rapportent à aucune direction ne sont pas considérées. Des innombrables systèmes de sensations dont notre espace sensible était formé, quelques-uns ont disparus, d'autres ont été fondus ensemble. Leur nombre a diminué.

Mais cette nouvelle classification n'est pas encore l'espace ; elle n'implique aucune idée de mesure ; et, de plus, la catégorie restreinte ainsi obtenue ne serait pas un espace isotrope, c'est-à-dire que des directions différentes ne nous apparaîtraient pas comme remplissant le même office et comme interchangeables l'une avec l'autre. Et ainsi, ce « sentiment de la direction », loin d'expliquer ce qu'est l'espace, aurait besoin lui-même d'être expliqué.

Mais aidera-t-il au moins à trouver l'explication que nous cherchons ? Non, parce que les lois de cette association d'idées que nous appelons le sentiment de la direction sont extraordinairement complexes. Comme je l'ai expliqué plus haut, la même sensation musculaire peut correspondre à une foule de directions différentes suivant la position du corps, laquelle nous est connue par d'autres sensations concomitantes. Des associations si complexes ne peuvent être le résultat que d'un processus extrêmement long. Ce n'est donc pas ce chemin qui nous conduira le plus rapidement

à notre but. Ne regardons donc pas comme acquis le sentiment de la direction, mais revenons à « l'espace sensible » dont nous étions partis plus haut.

REPRÉSENTATION DE L'ESPACE

L'espace sensible n'a rien de commun avec l'espace géométrique. Je crois que peu de personnes seront disposées à contester cette assertion. Il serait peut-être possible d'épurer la catégorie que j'ai considérée au début de cet article et de construire quelque chose qui ressemblât davantage à l'espace géométrique. Mais, quoi que nous fassions, l'espace ainsi construit ne serait jamais ni infini, ni homogène, ni isotrope ; il ne pourrait le devenir qu'en cessant d'être accessible à nos sens.

Nos représentations ne sont que la reproduction de nos sensations ; nous ne pouvons donc pas figurer l'espace géométrique. Nous ne pouvons pas nous représenter les objets dans l'espace géométrique, mais seulement raisonner sur eux comme s'ils existaient dans cet espace.

Un peintre s'efforcerait en vain de construire sur sa toile un objet possédant trois dimensions. L'image qu'il trace n'en aura jamais que deux, comme sa toile. Quand nous essayons, par exemple, de nous représenter le soleil et les planètes dans l'espace, tout ce que nous pouvons faire est de nous représenter les sensations visuelles que nous éprouvons quand cinq ou six petites sphères tournent tout près de nous.

L'espace géométrique ne peut donc pas servir de catégorie pour nos représentations. Il n'est pas une forme de notre sensibilité. Il ne peut nous servir que dans nos raisonnements. Il est une forme de notre entendement.

DÉPLACEMENT ET CHANGEMENT D'ÉTAT

Nous percevons du premier coup que nos sensations varient, que nos impressions sont sujettes au changement. Les lois de ces variations ont été cause que nous avons créé la géométrie et la notion d'espace géométrique. Si nos sensations n'étaient pas variables, il n'y aurait pas de géométrie.

Mais ce n'est pas tout. La géométrie ne serait pas née si nous n'avions pas été amenés à répartir en deux classes les changements que peuvent subir nos impressions. Nous disons tantôt que nos impressions ont changé parce que les objets qui les produisaient ont subi quelque changement d'état et tantôt que nos impressions ont changé parce que les objets ont subis un déplacement. Quel est le fondement de cette distinction ?

Une sphère dont un hémisphère est bleu et l'autre rouge tourne sur elle-même devant nos yeux et montre d'abord un hémisphère bleu et ensuite un hémisphère rouge. Un liquide bleu contenu dans un vase subit une réaction chimique qui le fait devenir rouge. Dans les deux cas l'impression de bleu a été remplacée par celle de rouge. Pourquoi le premier de ces changements est-il classé parmi les déplacements et le second parmi les changements d'état ? Evidemment parce que dans le premier cas il me suffit de tourner autour de la sphère pour me placer de nouveau vis-à-vis de l'autre

hémisphère et éprouver ainsi une seconde fois l'impression de bleu.

Un objet se déplace devant mon œil et son image qui se formait d'abord au centre de ma rétine se forme maintenant sur le bord. La sensation qui m'était apportée par une fibre nerveuse partant du centre de la rétine est remplacée par une autre sensation qui m'est apportée par une fibre partant du bord de la rétine. Ces sensations me sont amenées par deux nerfs différents. Elles doivent m'apparaître comme qualitativement différentes, et, s'il n'en était pas ainsi, comment pourrais-je les distinguer ?

Pourquoi alors suis-je amené à penser que c'est la *même* image qui s'est déplacée ? Est-ce parce que l'une de ces sensations succède souvent à l'autre ? Mais des successions analogues sont fréquentes. Ce sont elles qui font naître toutes nos associations d'idées et nous n'en concluons ordinairement pas qu'elles sont dues au déplacement d'un objet qualitativement invariable.

Mais ce qui arrive dans ce cas, c'est que nous pouvons *suivre l'objet de l'œil* et, par un déplacement de l'œil qui est généralement volontaire et accompagné de sensations musculaires, ramener l'image au centre de la rétine et *rétablir ainsi la sensation primitive*.

Je conclurai donc comme il suit :

Parmi les changements que subissent nos impressions, nous distinguons deux classes :

1° Les premiers sont indépendants de notre volonté et ne sont pas accompagnés de sensations musculaires. Ce sont des *changements externes*, pour ainsi dire.

2° Les autres sont volontaires et accompagnés de sensations musculaires. Nous pouvons les appeler *changements internes*.

Nous observons ensuite que dans certains cas, lorsqu'un changement externe a modifié nos impressions, nous pouvons, en provoquant volontairement un changement interne, rétablir nos impressions primitives. Le changement externe peut donc être *corrigé* par un changement interne. Les changements externes peuvent être, par conséquent, subdivisés en deux classes :

1° Les changements qui sont susceptibles d'être corrigés par un changement interne. Ce sont les *déplacements*.

2° Les changements qui n'en sont pas susceptibles. *Ce sont les changements d'état.*

Un être qui ne pourrait pas se mouvoir serait incapable de faire cette distinction. *Un tel être, par conséquent, ne pourrait jamais créer la géométrie,* — même si ses sensations étaient variables et même si les objets qui l'entourent étaient mobiles.

CLASSIFICATION DES DÉPLACEMENTS

Une sphère dont un hémisphère est bleu et l'autre rouge tourne sur elle-même devant moi et me présente d'abord son côté bleu et ensuite son côté rouge. Je regarde ce changement externe comme un déplacement parce que je peux le corriger par un changement interne, c'est-à-dire en tournant autour de la sphère. Répétons l'expérience avec une autre sphère dont un hémisphère est vert et l'autre jaune. L'impression de l'hémisphère jaune succédera à celle du vert comme auparavant celle du rouge succédait à celle du bleu. Pour la même raison je regarderai ce nouveau changement externe comme un déplacement.

Mais ce n'est pas tout. Je dis aussi que ces deux changements externes sont dus au *même* déplacement, c'est-à-dire à une rotation. Cependant, il n'y a pas de rapport entre l'impression de l'hémisphère jaune et celle du rouge, pas plus qu'il n'y en a entre celle de l'hémisphère bleu et celle du vert, et je n'ai aucune raison de dire qu'il existe entre le jaune et le vert la même relation qu'entre le rouge et le bleu. Non, je dis que ces deux changements externes sont dus au même déplacement parce que je les ai *corrigés* par le même changement interne. Mais comment puis-je savoir que les deux changements internes par lesquels j'ai corrigé d'abord le changement externe du bleu au rouge, et ensuite celui du vert au jaune, doivent être considérés comme identiques ? Tout simplement parce qu'ils ont provoqué les *mêmes* sensations musculaires ; et pour cela je n'ai pas besoin de connaître d'avance la géométrie et de me représenter les mouvements de mon corps dans l'espace géométrique.

Ainsi plusieurs changements externes qui n'ont en eux-mêmes rien de commun peuvent être corrigés par le même changement interne. Je les rassemble dans la même classe et les considère comme le même déplacement.

Une classification analogue peut être faite en ce qui concerne les changements internes. Tous les changements internes ne sont pas capables de corriger un changement externe. Seuls ceux qui en sont capables

2

peuvent être appelés déplacements. D'autre part, le même changement externe peut être corrigé par différents changements internes. Une personne qui saurait la géométrie pourrait exprimer cette idée en disant que mon corps peut aller de la position A à la position B par plusieurs chemins différents. Chacun de ces chemins correspond à une série de sensations musculaires et pour le moment je n'ai pas connaissance d'autre chose que de ces sensations musculaires. Il n'y a pas de ressemblance entre deux de ces séries et si je les considère néanmoins comme représentant le *même* déplacement, c'est parce qu'elles sont susceptibles de corriger le même changement externe.

La classification qui précède suggère deux réflexions :

1° La classification n'est pas une donnée brute de l'expérience, parce que la compensation mentionnée plus haut des deux changements, l'un interne et l'autre externe, n'est jamais exactement réalisée. C'est donc une opération active de l'esprit qui essaie d'insérer les résultats bruts de l'expérience dans une forme préexistante, dans une catégorie. Cette opération consiste à identifier deux changements parce qu'ils possèdent un caractère commun, et cela malgré qu'ils ne le possèdent pas exactement. Néanmoins, le fait même que l'esprit ait l'occasion d'accomplir cette opération est dû à l'expérience, car l'expérience seule peut lui apprendre que la compensation s'est approximativement produite.

2° La classification nous amène en outre à reconnaître l'identité de deux déplacements et il en résulte qu'un déplacement peut être *répété* deux ou plusieurs

fois. C'est cette circonstance qui introduit le nombre et permet la mesure là où régnait auparavant la pure qualité.

INTRODUCTION DE LA NOTION DE GROUPE

Que nous soyons capables d'aller plus loin est dû au fait suivant dont l'importance est capitale.

Il est évident que si nous considérons un changement A et le faisons suivre d'un autre changement B, nous sommes libres de regarder l'*ensemble* des deux changements A suivi de B comme un seul changement qui peut s'écrire A+B et peut être appelé le changement résultant. (Il va sans dire que A+B n'est pas nécessairement identique à B+A). Il en résulte alors que si deux changements A et B sont des déplacements, le changement A+B est aussi un déplacement. Les mathématiciens expriment cela en disant que l'*ensemble des déplacements forme un groupe*. S'il n'en était pas ainsi il n'y aurait pas de géométrie.

Mais comment savons-nous que l'*ensemble* des déplacements est un groupe ? Est-ce par un raisonnement *a priori* ? Est-ce par expérience ? On est tenté de raisonner *a priori* et de dire : si le changement externe A est corrigé par le changement interne A', et le changement externe B par le changement interne B', le changement externe résultant A+B sera corrigé par le changement interne résultant B'+A'. Donc ce changement résultant est par définition un déplacement, ce qui revient à dire que l'*ensemble* des déplacements forme un groupe.

Mais ce raisonnement est sujet à plusieurs objections. Il est clair que les changements A et A' se compensent, c'est-à-dire que si ces deux changements se succèdent, je retrouverai mes impressions primitives —, résultat que je peux écrire comme il suit :

$$A+A'=O$$

Je vois également que B+B'=O. Ce sont ces hypothèses que j'ai faites au début et qui m'ont servi à définir les changements A, A', B et B'. Mais est-il certain que nous aurons encore B+B'=O *après* les deux changements A et A' ? Est-il certain que ces deux premiers changements se compensent d'une manière telle qu'après eux, non seulement je retrouverai mes impressions primitives, mais que les deux changements B et B' retrouveront toutes leurs propriétés initiales et en particulier celle de se compenser mutuellement ? Si nous admettons cela, nous pourrons en conclure que je retrouverai mes impressions primitives quand les quatre changements se suivront dans l'ordre

$$A, A', B, B' ;$$

mais non pas qu'il en sera encore de même quand ils se succéderont dans l'ordre

$$A, B, B', A'.$$

Et ce n'est pas tout. Si deux changements externes α et α' sont regardés comme identiques sur la base de la convention adoptée plus haut, ou, en d'autres termes, sont susceptibles d'être corrigés par le même changement interne A ; si, d'autre part, deux autres changements externes β et β' peuvent être corrigés par le même changement interne B et peuvent par conséquent être regardés aussi comme identiques, avons-nous le

droit de conclure que les deux changements $\alpha+\beta$ et $\alpha'+\beta'$ sont susceptibles d'être corrigés par le même changement interne et sont par conséquent identiques ? Une telle proposition n'est aucunement évidente, et, si elle est vraie, elle ne peut être le résultat d'un raisonnement *a priori*.

Par conséquent, cette série de propositions, que je résume en disant que les déplacements forment un groupe, ne nous est pas donnée par un raisonnement *a priori*. Sont-elles donc un résultat d'expérience ? On est enclin à admettre qu'elles le sont ; et cependant on a un sentiment de véritable répugnance à le faire. Des expériences plus précises ne peuvent-elles pas prouver un jour que la loi énoncée plus haut n'est qu'approximative ? Et alors qu'adviendra-t-il de la géométrie ?

Mais nous pouvons être tranquilles sur ce point. La géométrie est à l'abri de toute révision ; aucune expérience, si précise soit-elle, ne peut la renverser. Si cela se pouvait, il y a longtemps que ce serait fait. Nous savons depuis longtemps que toutes les soi-disant lois expérimentales ne sont que des approximations et des approximations grossières.

Que faut-il donc faire ? Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas *du tout* aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'*approximativement*, nous considérons ce changement, *par une convention artificielle*, comme la résultante de deux autres changements composants. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant *rigoureusement* aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. Ainsi nous disons que les solides naturels ne subissent pas seulement de grands changements de position, mais aussi de petites flexions et de petites dilatations thermiques.

Par un changement externe α par exemple, nous passons de l'*ensemble* d'impressions A à l'*ensemble* B. Nous corrigeons ce changement par un changement interne volontaire β et nous sommes ramenés à l'*ensemble* A. Un nouveau changement externe α' nous fait passer de nouveau de l'*ensemble* A à l'*ensemble* B. Nous devons nous attendre alors à ce que ce changement α' puisse à son tour être corrigé par un autre changement interne volontaire β' qui provoquerait les mêmes sensations musculaires que β et qui ramènerait l'ensemble d'impressions A. Si l'expérience ne confirme pas cette prédiction, nous ne sommes pas embarrassés. Nous disons que le changement α', bien qu'il nous ait fait, comme α, passer de l'*ensemble* A à l'*ensemble* B, n'est cependant pas identique au changement α. Si notre prédiction ne se confirme qu'approximativement, nous disons que le changement α' est un déplacement identique au déplacement α, mais accompagné d'une légère altération qualitative.

En résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable.

CONSÉQUENCES DE L'EXISTENCE DU GROUPE

Ce premier fait que les déplacements forment un groupe, contient en germe une foule de conséquences importantes. L'espace doit être homogène ; c'est-à-dire que tous ses points sont capables de jouer le même rôle. L'espace doit être isotrope ; c'est-à-dire que toutes les directions qui partent du même point doivent jouer le même rôle.

Si un déplacement D me transporte d'un point à un autre ou change mon orientation, je dois être, après ce déplacement D, encore capable des mêmes mouvements qu'avant le déplacement D, et ces mouvements doivent avoir conservé leurs propriétés fondamentales qui m'ont permis de les classer parmi les déplacements. S'il n'en était pas ainsi, le déplacement D suivi d'un autre déplacement ne serait pas équivalent à un troisième déplacement ; en d'autres termes, les déplacements ne formeraient pas un groupe.

Ainsi le nouveau point auquel j'ai été transporté joue le même rôle que celui auquel j'étais initialement ; ma nouvelle orientation joue aussi le même rôle que l'ancienne ; l'espace est homogène et isotrope.

Etant homogène il sera illimité ; car une catégorie qui est limitée ne saurait être homogène puisque ses frontières ne pourraient pas jouer le même rôle que son centre. Mais cela ne veut pas dire qu'il est infini ; car la sphère est une surface sans frontière et cependant elle est finie. Toutes ces conséquences sont contenues en germe dans le fait que nous venons de découvrir.

Mais nous sommes encore incapables de les percevoir parce que nous ne savons pas encore ce que c'est qu'une direction ni même ce que c'est qu'un point.

PROPRIÉTÉS DU GROUPE

Nous avons maintenant à étudier les propriétés du groupe. Ces propriétés sont purement formelles. Elles sont indépendantes de toute qualité et en particulier de la nature qualitative des phénomènes qui constituent le changement auquel nous avons donné le nom de déplacement. Nous avons remarqué plus haut que nous pouvions considérer deux changements comme représentant le même déplacement bien que les phénomènes correspondants soient qualitativement tout à fait différents. Les propriétés de ce déplacement restent les mêmes dans les deux cas ; ou du moins les seules propriétés qui nous intéressent, les seules qui soient susceptibles d'être étudiées mathématiquement sont celles dans lesquelles la qualité n'intervient aucunement. Une courte digression est ici nécessaire pour rendre ma pensée compréhensible. Ce que les mathématiciens appellent un groupe est l'*ensemble* d'un certain nombre d'opérations et de toutes les combinaisons qui peuvent être formées avec elles. Dans le groupe qui nous occupe nos opérations sont des déplacements. Il arrive parfois que deux groupes contiennent des opérations qui sont entièrement différentes quant à leur nature, et que néanmoins ces opérations se combinent suivant les mêmes lois. Nous disons alors que les deux groupes sont isomorphes.

Les différentes permutations de six objets forment un groupe et les propriétés de ce groupe sont indépendantes de la nature des objets. Si au lieu de six objets matériels nous prenons six lettres ou même les six faces d'un cube, nous obtenons des groupes qui diffèrent quant à la matière dont ils sont composés, mais qui sont tous isomorphes les uns avec les autres.

Les propriétés dites formelles sont celles qui sont communes à tous les groupes isomorphes. Si je dis, par exemple, que telle ou telle opération répétée trois fois est équivalente à telle ou telle autre répétée quatre fois, j'ai énoncé une propriété formelle, entièrement indépendante de la qualité. De telles propriétés formelles sont susceptibles d'être étudiées mathématiquement. On doit donc les énoncer sous forme de propositions rigoureuses. D'un autre côté, les expériences qui servent à les vérifier ne peuvent jamais être qu'approchées. C'est dire que les expériences en question ne peuvent jamais être le véritable fondement de ces propositions. Nous avons en nous, en puissance, un certain nombre de modèles de groupes et l'expérience nous aide seulement à découvrir lequel de ces modèles s'écarte le moins de la réalité.

CONTINUITÉ

Nous observons d'abord que le groupe est *continu*. Voyons ce que cela veut dire et comment le fait peut être établi.

Le même déplacement peut être répété deux fois, trois fois, etc. Nous obtenons ainsi différents déplacements qui peuvent être regardés comme des *multiples* du premier. Les multiples du même déplacement D forment un groupe ; car la succession de deux de ces multiples est encore un multiple de D. De plus, tous ces multiples sont échangeables ; (vérité qu'on exprime en disant que le groupe qu'ils forment est un *faisceau*) ; c'est à dire qu'il est indifférent que nous répétions D d'abord trois fois et ensuite quatre fois ou d'abord quatre fois et ensuite trois fois. C'est là un jugement analytique *a priori*, une pure tautologie. Ce groupe des multiples de D n'est qu'une partie du groupe total. C'est ce qu'on appelle un *sous-groupe.*

Nous découvrons bientôt qu'un déplacement quelconque peut toujours être divisé en deux, trois ou un nombre quelconque de parties ; je veux dire que nous pouvons toujours trouver un autre déplacement qui, répété deux, trois fois, reproduira un déplacement donné. Cette divisibilité à l'infini nous conduit naturellement à la notion de la continuité mathématique ; cependant les choses ne sont pas aussi simples qu'elles le paraissent à première vue.

Nous ne pouvons pas prouver cette divisibilité à l'infini directement. Quand un déplacement est très petit, il est imperceptible pour nous. Quand deux déplacements diffèrent très peu, nous ne pouvons pas les distinguer. Si un déplacement D est extrêmement petit, ses multiples consécutifs seront indiscernables. Il peut arriver alors que nous ne puissions pas distinguer 9 D de 10 D, ni 10 D de 11 D, mais que nous puissions néanmoins distinguer 9 D de 11 D. Si nous voulions transcrire ces données brutes de l'expérience en une formule, nous écririons

$$9\,D = 10\,D,\ 10\,D = 11\,D,\ 9\,D < 11\,D.$$

Ce serait là la formule du continu physique. Mais

une telle formule répugne à la raison. Elle ne correspond à aucun des modèles que nous portons en nous. Nous échappons à ce dilemme par un artifice ; et à ce continu physique — ou si vous préférez à ce continu sensible qui se présente sous une forme intolérable pour nos esprits —, nous substituons le continu mathématique. Séparant nos sensations de ce quelque chose que nous appelons leur cause, nous admettons que le quelque chose en question se conforme au modèle que nous portons en nous et que nos sensations s'en écartent seulement à cause de leur grossièreté.

Le même procédé revient chaque fois que nous soumettons à la mesure les données de nos sens ; il est notamment applicable à l'étude des déplacements. Du point que nous avons atteint maintenant, nous pouvons rendre compte de nos sensations de plusieurs manières différentes.

1° Nous pouvons supposer que chaque déplacement fait partie d'un faisceau formé de tous les multiples d'un certain petit déplacement, beaucoup trop petit pour être perçu par nous. Nous aurions alors un faisceau discontinu qui nous donnerait l'illusion de la continuité physique parce que nos sens grossiers seraient incapables de discerner deux éléments consécutifs quelconques du faisceau.

2° Nous pouvons supposer que chaque déplacement fait partie d'un faisceau plus complexe et plus riche. Tous les déplacements dont ce faisceau se compose seraient échangeables. Deux quelconques d'entre eux seraient des multiples d'un autre déplacement plus petit qui ferait lui-même partie du faisceau et qui pourrait être regardé comme leur plus grand commun diviseur. Enfin tout déplacement du faisceau pourrait être divisé en deux, trois ou un nombre quelconque de parties, dans le sens que j'ai donné plus haut à ce mot et le diviseur ferait encore partie du faisceau. Les différents déplacements du faisceau seraient, pour ainsi dire, commensurables l'un avec l'autre. A chacun d'eux correspondrait un nombre commensurable et *vice-versa*. Ce serait donc déjà une sorte de continu mathématique ; mais cette continuité serait encore imparfaite, car il n'y aurait rien qui correspondît aux nombres incommensurables.

3° Nous pouvons supposer enfin que notre faisceau est parfaitement continu. Tous ses déplacements sont échangeables. A chaque nombre commensurable ou incommensurable correspond un déplacement et *vice versa*. Le déplacement correspondant au nombre $n\ a$ n'est pas autre chose que le déplacement correspondant au nombre a répété n fois.

Pourquoi est-ce la dernière de ces trois solutions qui a été adoptée ? Les raisons de ce choix sont complexes.

1° Il a été établi par l'expérience que les déplacements qui sont suffisamment grands peuvent être divisés par un nombre quelconque ; et comme les instruments de mesure ont augmenté de précision, cette divisibilité a été démontrée pour des déplacements beaucoup plus petits, à l'égard desquels elle semblait d'abord douteuse. Nous avons ainsi été conduits par induction à supposer que cette divisibilité est une propriété de tous les déplacements, si petits qu'ils soient, et en conséquence à rejeter la première solution et à nous décider en faveur de la divisibilité à l'infini.

2° La première solution, comme la seconde, est incompatible avec les autres propriétés du groupe, que nous connaissons par d'autres expériences. J'expliquerai cela plus loin. La troisième solution s'impose donc à nous par ce fait seul. Le contraire pourrait être arrivé. Il aurait pu se faire que les propriétés du groupe fussent incompatibles avec la continuité. Alors nous aurions sans doute adopté la première solution.

SOUS-GROUPES

La plus importante des propriétés formelles d'un groupe est l'existence des sous-groupes. Il ne faut pas supposer qu'il peut être formé autant de sous-groupes que nous voulons et qu'il suffit de découper un groupe d'une manière arbitraire, comme on découperait une argile inerte, pour obtenir un sous-groupe. Si deux déplacements sont pris au hasard dans un groupe, il sera nécessaire, pour en former un sous-groupe, d'y joindre toutes leurs combinaisons et dans la plupart des cas, il arrive qu'en combinant ces deux déplacements de toutes les manières possibles, nous retrouvons finalement le groupe primitif dans sa forme initiale intacte. Ainsi il peut arriver qu'un groupe ne contienne pas de sous-groupe.

Cependant les groupes se distinguent les uns des autres, au point de vue formel, par le nombre de sous-groupes qu'ils contiennent et par les rapports des sous-groupes entre eux. Un examen superficiel du groupe des déplacements montre tout de suite qu'il contient quelques sous-groupes. Un examen plus approfondi les découvrira tous. Nous verrons que parmi ces sous-groupes, il y en a qui sont : 1° continus, c'est-à-dire dont tous les déplacements sont divisibles à l'infini ; 2° discontinus, c'est-à-dire dont aucun déplacement n'est divisible à l'infini ; 3° mixtes, c'est-à-dire dont certains déplacements sont divisibles à l'infini et d'autres ne le sont pas.

D'un autre point de vue, nous distinguerons, parmi nos sous-groupes, les faisceaux dont les déplacements sont tous échangeables et les sous-groupes qui ne possèdent pas cette propriété.

Une autre manière de classer les déplacements et les sous-groupes est la suivante :

Considérons deux déplacements D et D'. Soit D'' un troisième déplacement défini comme la résultante du déplacement D', suivi du déplacement D, suivi lui-même du déplacement inverse de D'. Nous appellerons ce déplacement D'' le *transformé* de D par D'.

Du point de vue formel tous les transformés du même déplacement sont en quelque sorte équivalents ; ils jouent le même rôle ; les Allemands disent qu'ils sont *gleichberechtigt*. Ainsi (s'il m'est permis pour un instant d'employer à l'avance le langage ordinaire de la géométrie que nous sommes censés ne pas savoir encore) deux rotations de 60° sont *gleichberechtigt*, deux déplacements hélicoïdaux du même pas et de la même fraction de spire sont *gleichberechtigt*.

Les transformés de tous les déplacements d'un sous-groupe *g* par le même déplacement D' forment un nouveau sous-groupe que nous appellerons le transformé du sous-groupe *g* par le déplacement D'. Les différents transformés du même sous-groupe,

jouant le même rôle au point de vue formel, sont *gleichberechtigt*.

Il arrive généralement que beaucoup des transformés du même sous-groupe sont identiques ; il arrivera même quelquefois que tous les transformés d'un sous-groupe soient identiques les uns aux autres et identiques au sous-groupe primitif. On dit alors que ce sous-groupe est *invariant* (ce qui arrive, par exemple, dans le cas du sous-groupe formé de toutes les translations). L'existence d'un sous-groupe invariant est une propriété formelle de la plus haute importance.

SOUS-GROUPES ROTATIFS

Le nombre des sous-groupes est infini ; toutefois ils peuvent être divisés en un nombre assez limité de classes dont je ne veux pas donner ici une énumération complète. Mais nous ne percevons pas tous ces sous-groupes avec la même facilité. Certains d'entre eux n'ont été découverts que tout récemment. Leur existence n'est pas une vérité intuitive. Sans doute, elle peut se déduire des propriétés fondamentales du groupe, de propriétés qui sont connues de tout le monde et qui sont, pour ainsi dire, le patrimoine commun de tous les esprits, sans doute elle y est contenue en germe ; cependant ceux qui ont démontré leur existence ont senti à juste titre qu'ils avaient fait une découverte et ont souvent été obligés d'écrire de longs mémoires pour parvenir à leurs conclusions.

D'autres sous-groupes, au contraire, nous sont connus d'une manière bien plus immédiate. Sans beaucoup de réflexion chacun croit en avoir une intuition directe et l'affirmation de leur existence constitue les axiomes d'Euclide. Comment se fait-il que certains sous-groupes ont tout de suite attiré l'attention tandis que d'autres ont échappé à toute recherche pendant beaucoup plus longtemps? Nous allons expliquer cela par quelques exemples.

Un corps solide ayant un point fixe tourne devant nos yeux. Son image se peint sur notre rétine et chacune des fibres du nerf optique nous transmet une impression; mais à cause du mouvement du corps solide cette impression est variable. Une de ces fibres, cependant, nous transmet une impression constante. C'est celle à l'extrémité de laquelle l'image du point fixe s'est formée. Nous avons ainsi un changement qui fait varier certaines sensations, mais en laisse d'autres invariables. C'est une propriété du déplacement, mais à première vue il n'apparait pas que ce soit une propriété formelle. Il semble qu'elle fasse partie des caractères qualitatifs des sensations perçues. Nous allons voir cependant que nous pouvons en dégager une propriété formelle et pour rendre ma pensée plus claire, je vais comparer ce qui se passe dans ce cas avec ce qui arrive dans une autre circonstance qui est analogue en apparence.

Je suppose qu'un certain corps se meut devant mes yeux d'une manière quelconque, mais qu'une certaine région de ce corps est peinte d'une couleur suffisamment uniforme pour ne pas laisser discerner d'ombres. Disons qu'elle est rouge. Si les mouvements ne sont pas de trop grande amplitude et si la région rouge est suffisamment étendue, certaines parties de la rétine resteront constamment dans l'image de cette

région, certaines fibres nerveuses me transmettront constamment l'impression du rouge, le déplacement aura laissé certaines sensations invariables.

Mais il y a une différence essentielle entre les deux cas. Revenons au premier. Nous assistions là à un changement externe dans lequel certaines sensations A ne changeaient pas, tandis que d'autres sensations B changeaient. Nous pouvons corriger ce changement externe par un changement interne et dans cette correction les sensations A restent cependant invariables.

Mais voici maintenant un nouveau corps solide qui tourne devant nos yeux et subit les mêmes rotations que le premier. C'est là un nouveau changement externe qui peut être entièrement différent du premier d'un point de vue qualitatif, parce que le nouveau corps qui tourne peut être peint de nouvelles couleurs ou parce que nous sommes avertis de sa rotation par le toucher et non par la vue. Nous découvrons cependant que c'est le *même* déplacement parce qu'il peut être corrigé par le même changement interne. Et nous découvrons aussi que, dans le nouveau changement externe, certaines sensations A', (peut-être totalement différentes de A), sont restées invariables, tandis que d'autres sensations B' ont varié. Ainsi cette propriété de conserver certaines sensations nous apparaît finalement comme une propriété formelle indépendante de la nature qualitative de ces sensations.

Passons au second exemple. Nous avons d'abord un changement externe dans lequel une certaine sensation C, une sensation de rouge, est demeurée constante. Supposons qu'un autre corps solide, peint différemment, subisse le même déplacement. Voici un

3

nouveau changement externe, et nous savons qu'il représente le même déplacement, parce que nous pouvons le corriger par le même changement interne. Nous découvrons généralement que dans ce nouveau changement externe, il n'arrive pas que certaines sensations demeurent constantes. Ainsi la conservation de la sensation C nous apparaîtra seulement comme une propriété accidentelle, liée à la nature qualitative de la sensation.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer parmi les déplacements ceux qui conservent certaines sensations. L'*ensemble* des déplacements qui conservent ainsi un système donné de sensations forme évidemment un sous-groupe que nous pouvons appeler *sous-groupe rotatif*.

Telle est la conclusion que nous tirons de l'expérience. Il est inutile de faire ressortir combien l'expérience est grossière et combien d'autre part la conclusion est précise. L'expérience ne peut donc pas nous imposer la conclusion, mais elle suffit à nous la suggérer. Elle suffit à montrer que, de tous les groupes dont les modèles préexistent en nous, les seuls que nous puissions adopter en vue d'y rapporter nos sensations sont ceux qui contiennent un tel sous-groupe.

A côté du sous-groupe rotatif, considérons ses transformés qui peuvent aussi être appelés sous-groupes rotatifs. (Sous-groupe de rotations autour d'un point fixe.) Par de nouvelles expériences, toujours très grossières, il apparaît alors :

1° Que deux sous-groupes rotatifs quelconques ont des déplacements communs ;

2° Que ces déplacements communs, tous échan-

geables entre eux, forment un faisceau qui peut être appelé *faisceau rotatif*. (Rotations autour d'un axe fixe.)

3° Qu'un faisceau rotatif quelconque fait partie non seulement de deux sous-groupes rotatifs, mais d'une infinité.

C'est là l'origine de la notion de ligne droite comme le sous-groupe rotatif était l'origine de la notion de point.

Considérons maintenant tous les déplacements d'un faisceau rotatif. Si nous considérons un déplacement quelconque, il ne sera pas, en général, échangeable avec tous les déplacements du faisceau, mais nous découvrirons bientôt qu'il existe des déplacements qui sont échangeables avec tous ceux du faisceau rotatif et qu'ils forment un sous-groupe plus vaste qui peut être appelé sous-groupe hélicoïdal. (Combinaisons de rotations autour d'un axe et de translations parallèles à cet axe). Cela est évident si l'on observe qu'une ligne droite peut glisser le long d'elle-même.

Enfin, nous tirons des mêmes observations grossières des propositions telles que les suivantes :

Tout déplacement suffisamment petit et faisant partie d'un sous-groupe rotatif donné, peut toujours être décomposé en trois autres, appartenant respectivement à trois faisceaux rotatifs donnés. Tout déplacement échangeable avec un sous-groupe rotatif fait partie de ce sous-groupe.

Tout déplacement suffisamment petit peut toujours être décomposé en deux autres, appartenant respectivement à deux sous-groupes rotatifs donnés ou à *six faisceaux rotatifs donnés*.

Je reviendrai plus tard en détail sur l'origine de ces diverses propositions.

SOUS-GROUPES TRANSLATIFS

Avec ces propositions, nous sommes en mesure, non pas de construire la géométrie d'Euclide, mais de limiter notre choix à un choix entre la géométrie d'Euclide et celles de Lobatchewsky ou de Riemann. Pour aller plus loin, nous avons besoin d'une nouvelle proposition qui prenne la place du postulatum des parallèles. La proposition qui en tiendra lieu sera l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe *invariant* dont tous les déplacements sont échangeables et qui est formé de toutes les translations.

C'est là ce qui détermine notre choix en faveur de la géométrie d'Euclide, parce que le groupe qui correspond à la géométrie de Lobatchewsky ne contient pas un tel sous-groupe invariant.

NOMBRE DES DIMENSIONS

Dans la théorie ordinaire des groupes, nous distinguons l'ordre et le degré. Supposons d'abord le cas le plus simple, celui d'un groupe formé par différentes permutations entre certains objets. Le nombre des objets est appelé le degré ; le nombre des permutations est appelé l'ordre du groupe. Deux tels groupes peuvent être isomorphes et leurs permutations peuvent se combiner suivant les mêmes lois sans que leur degré soit le même. Ainsi considérons les différentes manières dont un cube peut être superposé à

lui-même. Les sommets peuvent être échangés l'un avec l'autre comme peuvent l'être aussi les faces et les arêtes ; d'où résultent trois groupes de permutations qui sont évidemment isomorphes entre eux ; mais leur degré peut être huit, six ou douze, puisqu'il y a huit sommets, six faces et douze arêtes.

D'autre part deux groupes isomorphes entre eux ont toujours le même ordre. Le degré est, pour ainsi dire, un élément matériel et l'ordre un élément formel dont l'importance est bien plus grande. La théorie de deux groupes de degré différent peut être la même en ce qui concerne ses propriétés formelles ; exactement comme la théorie mathématique de l'addition de trois vaches et quatre vaches est identique à celle de trois chevaux et quatre chevaux.

Quand nous passons aux groupes continus les définitions de l'ordre et du degré doivent être modifiées, mais sans en sacrifier l'esprit. Les mathématiciens supposent ordinairement que l'objet des opérations du groupe est un *ensemble* d'un certain nombre n de quantités susceptibles de varier d'une manière continue, lesquelles quantités sont appelées *coordonnées*. D'autre part, toute opération du groupe peut être regardée comme faisant partie d'un faisceau analogue au faisceau rotatif et comme un multiple d'un ordre très élevé d'une opération infinitésimale appartenant au même faisceau. En outre, toute opération infinitésimale du groupe peut être décomposée en k autres opérations appartenant à k faisceaux donnés. Le nombre n des coordonnées (ou des dimensions) est alors le *degré* et le nombre k des composantes d'une opération infinitésimale est l'*ordre*. Ici encore deux groupes isomorphes peuvent avoir des degrés différents, mais doivent être du même ordre. Ici encore le degré est un élément relativement matériel et secondaire et l'ordre un élément formel. Etant donné les lois établies plus haut, le groupe de déplacements que nous considérons est ici du sixième ordre, mais son degré est encore inconnu. Ce degré nous sera-t-il donné immédiatement ?

Les déplacements, comme nous l'avons vu, correspondent à des changements dans nos sensations et si nous distinguons dans notre groupe entre la forme et la matière, la matière ne peut pas être autre chose que ce que les déplacements font changer, c'est-à-dire nos sensations. Même si nous supposons que ce que nous avons appelé plus haut espace sensible fût déjà construit, la matière du groupe sera représentée par autant de variables continues qu'il y a de fibres nerveuses ; le « degré » de notre groupe serait extrêmement grand. L'espace n'aurait pas trois dimensions, mais autant qu'il y a de fibres nerveuses. Telle est la conséquence à laquelle nous arrivons si nous considérons comme matière de notre groupe ce qui nous est immédiatement donné. Comment échapperons-nous à la difficulté ? Evidemment en remplaçant le groupe qui nous est donné, avec sa forme et sa matière, par un autre groupe *isomorphe* dont la matière est plus simple.

Mais comment cela peut-il se faire ? Précisément grâce à cette circonstance que les déplacements qui conservent certains éléments sont les mêmes que ceux qui conservent certains autres éléments. Nous convenons alors de remplacer tous ces éléments qui sont conservés par les mêmes déplacements par un seul élément qui n'a qu'une valeur purement schématique.

D'où résulte une réduction considérable du degré.

Je vois par exemple un corps solide tournant autour d'un point fixe. Les parties voisines du point fixe sont peintes en rouge. C'est un déplacement et dans ce déplacement je perçois que quelque chose demeure invariable —, à savoir la sensation de rouge qui m'est transmise par une certaine fibre du nerf optique. Quelque temps après, je vois un autre corps solide tournant autour d'un point fixe. Mais les parties voisines du point fixe sont peintes en vert. Les sensations éprouvées sont en elles-mêmes tout à fait différentes, mais je perçois que c'est le même déplacement parce qu'il peut être corrigé par le même changement interne. Ici encore quelque chose reste invariable ; mais ce quelque chose est entièrement différent au point de vue matériel ; c'est la sensation de vert transmise par une certaine fibre nerveuse.

Ces deux choses qui sont matériellement si différentes, je les remplace schématiquement par une seule chose que j'appelle un point et j'exprime ma pensée en disant que dans un cas comme dans l'autre un point du corps est demeuré fixe. Ainsi chacun de nos nouveaux éléments sera ce qui est conservé par tous les déplacements d'un sous-groupe ; à chaque sous-groupe correspondra alors un élément et *vice-versa*.

Considérons les différents transformés du même sous-groupe. Le nombre en est infini et ils peuvent former une infinité continue simple, double ou triple. A chacun de ces transformés on peut faire correspondre un élément ; j'ai alors une infinité simple, double, triple, etc., de ces éléments et le degré de notre groupe continu est 1, 2, 3...

Supposons que nous prenions les différents transformés d'un sous-groupe rotatif. Nous avons ici une infinité triple. La matière de notre groupe se compose donc d'une triple infinité d'éléments. Le degré du groupe est trois. Nous avons en ce cas choisi le point comme élément de l'espace et donné à l'espace trois dimensions.

Supposons que nous prenions les différents transformés d'un sous-groupe hélicoïdal. Ici nous avons une infinité quadruple. La matière de notre groupe se compose d'une quadruple infinité d'éléments. Son degré est quatre. Nous avons en ce cas choisi la ligne droite comme élément de l'espace —, ce qui donnerait à l'espace quatre dimensions.

Supposons enfin que nous choisissions les différents transformés d'un faisceau rotatif. Le degré serait alors cinq. Nous avons choisi comme élément de l'espace la figure formée par une ligne droite et un point sur cette ligne droite. L'espace aurait cinq dimensions.

Ce sont là trois solutions dont chacune est possible logiquement. Nous préférons la première parce qu'elle est la plus simple et elle est la plus simple parce qu'elle est celle qui donne à l'espace le nombre le plus petit de dimensions. Mais il y a une autre raison qui recommande ce choix. Le sous-groupe rotatif attire d'abord notre attention parce qu'il conserve certaines sensations. Le sous-groupe hélicoïdal ne nous est connu que plus tard et plus indirectement. Le faisceau rotatif d'autre part n'est lui-même qu'un sous-groupe du sous-groupe rotatif.

LA NOTION DE POINT

Je sens que je touche ici au point le plus délicat

de cette discussion et je suis obligé de m'arrêter un moment pour justifier plus complètement les assertions qui précèdent et dont certaines personnes pourraient être disposées à douter. Beaucoup de personnes en effet considèrent la notion d'un point de l'espace comme si immédiate et si claire que toute définition en est superflue. Mais je pense qu'on m'accordera qu'une notion aussi subtile que celle du point mathématique sans longueur, largeur, ni épaisseur n'est pas immédiate et qu'elle a besoin d'être expliquée.

Mais en est-il de même pour la notion plus vague et moins exactement définie, mais plus empirique de *place* ? Y a-t-il quelqu'un qui ne s'imagine pas savoir parfaitement ce dont il parle lorsqu'il dit : cet objet occupe la place qui était occupée par cet autre objet ? Pour déterminer la portée de cette assertion et les conclusions qui peuvent en être tirées, cherchons à en analyser la signification. Si je n'ai bougé ni mon corps, ni ma tête, ni mon œil et si l'image de l'objet B affecte les mêmes fibres rétiniennes qu'affectait auparavant l'image de l'objet A ; si encore, bien que je n'aie bougé ni mon bras, ni ma main, les mêmes fibres sensorielles qui aboutissent à l'extrémité du doigt et qui me transmettaient d'abord l'impression que j'attribuais à l'objet A, me transmettent maintenant l'impression que j'attribue à l'objet B ; si ces deux conditions sont remplies, — alors nous convenons ordinairement de dire que l'objet B occupe la place que l'objet A occupait auparavant.

Avant d'analyser une convention aussi compliquée que celle que nous venons d'indiquer, je ferai d'abord une remarque. Je viens d'énoncer deux conditions :

l'une relative à la vue et l'autre relative au toucher. La première est nécessaire, mais n'est pas suffisante, car nous disons dans le langage ordinaire que le point de la rétine où une image se forme nous donne seulement connaissance de la direction du rayon visuel, mais que la distance de l'œil demeure inconnue. La seconde condition est à la fois nécessaire et suffisante parce que nous admettons que l'action du toucher ne s'exerce pas à distance et que l'objet A comme l'objet B ne peut agir sur le doigt que par un contact immédiat. Tout cela concorde avec ce que l'expérience nous a appris ; à savoir que la première condition peut être remplie sans que la seconde se réalise, mais que la seconde ne peut pas être remplie sans que la première le soit. Remarquons que nous sommes ici en présence d'un fait que nous ne pouvions pas connaître *a priori* et que l'expérience seule pouvait nous le démontrer.

Mais ce n'est pas tout. Pour déterminer la place d'un objet je n'ai fait usage que d'un œil et d'un doigt. J'aurais pu faire usage de plusieurs autres moyens, — par exemple de tous mes autres doigts. Après avoir été averti que l'objet A a produit sur mon premier doigt une impression tactile, supposons que par une série de mouvements S mon second doigt vienne au contact du même objet A. Ma première impression tactile cesse et est remplacée par une autre impression tactile qui m'est transmise par le nerf du second doigt et que j'attribue encore à l'action de l'objet A. Quelque temps après et sans que j'aie bougé ma main, le même nerf du second doigt me transmet une autre impression tactile que j'attribue à l'action d'un autre objet B.

Je dis alors que l'objet B a pris la place de l'objet A.

A ce moment je fais une série de mouvements S' inverse de la série S. Comment sais-je que ces deux séries sont inverses l'une de l'autre ? Parce que l'expérience m'a appris que quand le changement interne S qui correspond à certaines sensations musculaires est suivi par un changement interne S' qui correspond à d'autres sensations musculaires, il se produit une compensation et que mes impressions primitives, d'abord modifiées par le changement S, sont rétablies par le changement S'.

J'exécute la série de mouvements S'. L'effet doit être de ramener mon premier doigt à sa position initiale et de le mettre ainsi au contact de l'objet B qui a pris la place de l'objet A. Je dois donc m'attendre à ce que le nerf de mon premier doigt me transmette une impression tactile attribuable à l'objet B. Et en fait c'est ce qui arrive.

Mais serait-il donc absurde de supposer le contraire ? Et pourquoi serait-ce absurde ? Dirai-je que l'objet B ayant pris la place de l'objet A et mon premier doigt ayant repris sa place initiale, il doit toucher l'objet B comme il touchait auparavant l'objet A ? Cela serait une pure pétition de principe. Et pour le montrer, essayons d'appliquer le même raisonnement à un autre exemple ou plutôt revenons à l'exemple de la vue et du toucher que je citais au début.

L'image de l'objet A fait une impression sur l'une de mes fibres rétiniennes. En même temps, le nerf de l'un de mes doigts me transmet une impression tactile que j'attribue au même objet. Je ne bouge ni mon œil ni ma main. Et un moment après l'image de l'objet B frappe la même fibre rétinienne. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui précède, je serais tenté de conclure que l'objet B a pris la place de l'objet A et je m'attendrais à ce que le nerf de mon doigt me transmette une impression tactile attribuable à B. Et cependant je me serais trompé. Car il peut arriver que l'image de B se forme sur le même point de la rétine que l'image de A sans que la distance de l'œil soit la même dans les deux cas.

L'expérience a réfuté mon raisonnement. Je m'en tire en disant qu'il ne suffit pas que deux corps forment leur image sur la même fibre rétinienne pour me permettre de dire que les deux corps sont à la même place ; et je m'en tirerais d'une manière analogue dans le cas des deux doigts si les indications du second doigt n'avaient pas été d'accord avec celles du premier, et si l'expérience avait contredit mon raisonnement. Je dirais encore en ce cas que deux objets A et B peuvent faire une impression sur le même doigt par le moyen du toucher et cependant ne pas être à la même place ; en d'autres termes je conclurais que le toucher peut s'exercer à distance. Ou encore je conviendrais de ne considérer A et B comme étant à la même place qu'à la condition qu'il y ait concordance non seulement entre leurs effets sur le premier doigt, mais aussi entre leurs effets sur le second doigt. On pourrait presque dire, à un certain point de vue, que de cette façon une dimension de plus serait attribuée à l'espace.

En résumé, il y a certaines lois de *concordance* qui ne peuvent nous être révélées que par l'expérience, et qui sont à la base de la vague notion de place.

Mais même en considérant ces lois de concordance

comme acquises, pouvons-nous en déduire la notion beaucoup plus exacte de point et la notion du nombre des dimensions ? Cela reste à examiner.

D'abord une observation. Nous avons parlé de deux objets A et B qui ont formé l'un après l'autre leur image sur le même point de la rétine. Mais ces deux images ne sont pas identiques ; sans cela comment pourrais-je les distinguer ? Elles diffèrent, par exemple, en couleur. L'une est rouge, l'autre est verte. Nous avons donc deux sensations qui diffèrent en qualité et qui me sont certainement transmises par deux fibres nerveuses différentes quoique contiguës. Qu'ont-elles de commun et pourquoi suis-je conduit à les associer ? Il est probable que si l'œil était immobile nous n'aurions jamais pensé à cette association. Ce sont les mouvements de l'œil qui nous ont appris qu'il y a la même relation d'une part entre la sensation de vert au point A de la rétine et la sensation de vert au point B de la rétine et d'autre part entre la sensation de rouge au point A de la rétine et la sensation de rouge au point B de la rétine. Nous avons constaté, en fait, que les mêmes mouvements, correspondant aux mêmes sensations musculaires, nous font passer de la première à la seconde ou de la troisième à la quatrième. S'il n'en était pas ainsi, ces quatre sensations nous apparaîtraient comme qualitativement distinctes et nous ne songerions pas plus à établir entre elles une sorte de proportion qu'entre une sensation olfactive, une sensation gustative, une sensation auditive et une sensation tactile.

Cependant, quelle que soit l'origine de cette association, elle est impliquée dans la notion de place qui n'aurait pas pris naissance sans elle. Analysons donc ses lois. Nous ne pouvons les concevoir que sous deux formes différentes également éloignées de la continuité mathématique : à savoir la discontinuité ou la continuité physique.

Sous la première forme, nos sensations seront divisées en un très grand nombre de « familles », toutes les sensations d'une famille étant associées entre elles et n'étant pas associées à celles des autres familles. Puisque à chaque famille correspondrait une place, nous aurions un nombre fini, mais très grand de places et les places formeraient un ensemble discret. Il n'y aurait aucune raison pour les classer dans un tableau à trois dimensions plutôt que dans un tableau à deux ou à quatre dimensions et nous ne pourrions en déduire ni le point ni l'espace mathématiques.

Sous la seconde forme qui est plus satisfaisante les différentes familles se pénètrent l'une l'autre. A, par exemple, sera associé à B et B à C. Mais A ne nous apparaîtra pas comme associé à C. Nous trouverons que A et C n'appartiennent pas à la même famille, bien que A et B d'une part et B et C d'autre part nous apparaissent comme appartenant à la même famille. Ainsi nous ne pouvons pas distinguer entre un poids de neuf grammes et un poids de dix grammes, ni entre ce dernier poids et un poids de onze grammes. Mais nous percevons sans hésiter la différence entre le premier poids et le troisième. C'est là toujours la formule du continu physique.

Figurons-nous une série de pains à cacheter se recouvrant partiellement l'un l'autre de telle manière que le plan soit entièrement couvert ; ou mieux, figurons-nous quelque chose d'analogue dans un espace

à trois dimensions. Si ces pains à cacheter ne formaient par leur superposition qu'une sorte de ruban à une dimension, nous reconnaîtrions cette circonstance au fait que les associations dont je viens de parler obéiraient à une loi qui peut être formulée ainsi : si A est associé à la fois à B, C et D, D est associé à B ou à C. Cette loi ne serait pas vraie si nos pains à cacheter couvraient par leur superposition un plan ou un espace à plus de deux dimensions. Quand je dis par conséquent que toutes les places possibles constituent un ensemble à une dimension ou à plus d'une dimension, je veux simplement dire que la loi indiquée est vraie ou qu'elle est fausse. Quand je dis que ces places constituent un ensemble à deux ou trois dimensions, j'affirme simplement que certaines lois analogues sont vraies.

Tels sont les fondements sur lesquels nous pouvons essayer de construire une théorie *statique* du nombre des dimensions. On voit combien cette manière de définir le nombre des dimensions est compliquée, combien elle est imparfaite et il est inutile de faire remarquer la distance qui sépare encore le continu physique à trois dimensions ainsi compris du véritable continu mathématique à trois dimensions.

DISCUSSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE

Sans nous attarder à une foule de détails difficiles, voyons en quoi consistent ces associations sur lesquelles repose la notion de place. Nous verrons que nous sommes finalement ramenés, après un long détour, à la notion de groupe qui nous est apparue au début comme la plus propre à élucider la question du nombre des dimensions.

Par quels moyens différentes « places » sont-elles discernées les unes des autres ? Comment distinguerai-je, par exemple, deux places occupées successivement par l'extrémité d'un de mes doigts ? Evidemment par les mouvements que mon corps a faits dans l'intervalle, mouvements qui me sont révélés par une certaine série de sensations musculaires. Les deux places correspondent à deux attitudes et positions distinctes du corps qui me sont connues seulement par les mouvements que j'ai eus à faire pour changer une certaine attitude initiale et une certaine position initiale ; et ces mouvements eux-mêmes ne me sont connus que par les sensations musculaires qu'ils ont provoquées.

Deux attitudes du corps, ou deux places correspondantes du doigt me paraissent identiques, si les deux mouvements que je dois faire pour les atteindre diffèrent si peu l'un de l'autre que je ne puisse pas distinguer les sensations musculaires correspondantes. Elles me paraîtront non identiques, sans convention nouvelle, si elles correspondent à deux séries de sensations musculaires discernables.

Mais par ces considérations nous avons engendré non un continu physique à trois dimensions, mais un continu physique à un beaucoup plus grand nombre de dimensions ; car je peux faire varier les sensations musculaires correspondant à un très grand nombre de muscles et d'autre part je ne considère pas une sensation musculaire isolée, ni même un ensemble de sensations simultanées, mais une série de sensations successives et je peux faire varier d'une manière

arbitraire les lois d'après lesquelles ces sensations se succèdent.

Pourquoi le nombre des dimensions est-il réduit, ou, ce qui est la même chose, pourquoi considérons-nous deux places comme identiques, alors même que les deux attitudes correspondantes du corps sont différentes ? Pourquoi disons-nous dans certains cas que la place occupée par l'extrémité d'un doigt n'a pas changé quoique l'attitude du corps ait changé ?

C'est parce que nous découvrons que, très *souvent*, dans le mouvement qui nous fait passer de l'une à l'autre de ces deux attitudes, la sensation tactile attribuable au contact de ce doigt avec un objet A persiste et demeure constante. Nous *convenons* alors de dire que ces deux attitudes doivent être placées dans la même classe et que cette classe doit comprendre toutes les attitudes correspondant à la même place occupée par le même doigt. Et nous convenons de dire que ces deux attitudes doivent encore être placées dans la même classe même quand elles ne sont accompagnées d'aucune sensation tactile ou qu'elles sont accompagnées de sensations tactiles variables.

Cette convention a été inspirée par l'expérience, parce que l'expérience seule nous avertit que certaines sensations tactiles sont souvent persistantes. Mais pour que des conventions de cette espèce soient légitimes, elles doivent satisfaire à certaines conditions qu'il nous reste maintenant à analyser.

Si je place les attitudes A et B dans la même classe et aussi les attitudes B et C dans la même classe, il s'ensuit nécessairement que les attitudes A et C doivent être regardées comme appartenant à la même classe. Si donc nous convenons de dire que les mouvements qui causent le passage de l'attitude A à l'attitude B ne changent pas la place du doigt, et si la même chose est vraie des mouvements qui causent le passage de l'attitude B à l'attitude C, il s'ensuit nécessairement que la même chose est encore vraie de ceux qui causent le passage de l'attitude A à l'attitude C. En d'autres termes, l'ensemble des mouvements causant un passage d'une attitude à une autre attitude de la même classe constitue un groupe. C'est seulement lorsqu'un tel groupe existe que la convention établie plus haut est admissible. A chaque classe d'attitudes, et par conséquent à chaque place, correspondra donc un groupe et nous sommes ici ramenés encore à la notion de groupe sans laquelle il n'y aurait pas de géométrie.

Néanmoins il y a une différence entre le principe que nous discutons ici et la théorie que j'ai développée plus haut. Ici chaque place m'apparaît comme associée à un certain groupe qui est introduit comme sous-groupe S du groupe G formé par les mouvements qui peuvent donner au corps toutes les positions possibles et toutes les attitudes possibles, les situations relatives des différentes parties du corps pouvant varier d'une manière quelconque. Dans notre autre théorie au contraire chaque point était associé à un sous-groupe S' du groupe G' formé par les déplacements du corps envisagé comme un solide invariable, c'est-à-dire par des déplacements tels que les situations relatives des différentes parties du corps ne varient pas.

Laquelle des deux théories doit-on préférer ? Il est évident que G' est un sous-groupe de G et S' un sous-groupe de S. De plus G' est beaucoup plus simple

que G et pour cette raison la théorie que j'ai proposée d'abord et qui est basée sur la considération du groupe G' me paraît plus simple et plus naturelle et en conséquence je m'y tiendrai.

Mais quoi qu'il en soit, l'introduction d'un groupe, plus ou moins compliqué, me paraît absolument nécessaire. Toute théorie purement statique du nombre des dimensions donnera lieu à beaucoup de difficultés et il sera toujours nécessaire de se rabattre sur une théorie dynamique. Je suis heureux d'être d'accord sur ce point avec les idées exposées par le Professeur Newcomb dans sa *Philosophy of Hyperspace.*

LE RAISONNEMENT D'EUCLIDE

Mais pour montrer que l'idée de déplacement et par conséquent l'idée de groupe a joué un rôle prépondérant dans la genèse de la géométrie, il reste à faire voir que cette idée domine tous les raisonnements d'Euclide et des auteurs qui ont écrit après lui sur la géométrie élémentaire.

Euclide commence par énoncer un certain nombre d'axiomes ; mais on ne doit pas s'imaginer que les axiomes qu'il énonce explicitement sont les seuls auxquels il a recours. Si nous analysons soigneusement ses démonstrations, nous y trouverons, sous une forme plus ou moins voilée, un certain nombre d'hypothèses qui sont en réalité des axiomes déguisés ; et nous pourrions en dire presque autant de quelques-unes de ses définitions.

Sa géométrie commence par déclarer que deux figures sont égales si elles sont superposables. Ceci admet qu'elles peuvent être déplacées et aussi que parmi tous les changements qu'elles peuvent subir, nous pouvons distinguer ceux qui peuvent être regardés comme des déplacements sans déformation. Cette définition implique également que deux figures qui sont égales à une troisième sont égales entre elles. Et cela revient à dire que s'il y a un déplacement qui mette la figure A sur la figure B et un second déplacement qui superpose la figure B à la figure C, il y en aura aussi un troisième, la résultante des deux premiers, qui superposera la figure A à la figure C. En d'autres termes on présuppose que les déplacements forment un groupe. La notion de groupe, par conséquent, est introduite dès le début et introduite inévitablement.

Quand je prononce le mot « longueur », un mot que nous estimons souvent inutile de définir, j'admets implicitement que la figure formée par deux points n'est pas toujours superposable à celle qui est formée par deux autres points ; car autrement deux longueurs quelconques seraient égales entre elles. Or, c'est là justement une propriété importante de notre groupe.

J'énonce implicitement une hypothèse analogue quand je prononce le mot « angle ».

Et comment procédons-nous dans nos raisonnements ? En déplaçant nos figures et en leur faisant exécuter certains mouvements. Je veux montrer qu'en un point donné d'une ligne droite on peut toujours élever une perpendiculaire, et pour cela j'imagine une droite mobile tournant autour du point en question. Mais ici je présuppose que le mouvement de cette nouvelle droite est possible, qu'il est continu, et qu'en tournant ainsi elle peut passer de la position dans

laquelle elle se confond avec la ligne droite donnée à la position opposée dans laquelle elle se confond avec son prolongement. Ici encore nous avons une hypothèse qui touche aux propriétés du groupe.

Pour démontrer les cas d'égalité des triangles, les figures sont déplacées de telle sorte qu'elles se superposent l'une à l'autre.

Enfin quelle est la méthode employée pour démontrer que par un point donné on peut toujours mener une et une seule perpendiculaire à une droite donnée ? On fait tourner la figure de 180° autour de la ligne droite donnée et on obtient de cette manière le point symétrique au point donné par rapport à la droite donnée. Nous avons ici un exemple fort caractéristique et qui met en évidence le rôle que la ligne droite joue le plus fréquemment dans les démonstrations géométriques, celui d'un axe de rotation.

Ceci implique l'existence du sous-groupe que j'ai appelé le faisceau rotatif. Quand, — ce qui arrive aussi fréquemment —, on fait glisser une ligne droite le long d'elle-même (continuant bien entendu à supposer que la droite peut servir d'axe de rotation) on tient implicitement pour assurée l'existence du sous-groupe hélicoïdal. En résumé, le principal fondement des démonstrations d'Euclide est réellement l'existence du groupe et ses propriétés.

Sans doute, il a recours à d'autres axiomes qu'il est plus difficile de rapporter à la notion de groupe. Tel est l'axiome qu'emploient quelques géomètres quand ils définissent la ligne droite comme la plus courte distance entre deux points. *Mais ce sont précisément les axiomes de cette nature qu'Euclide énonce.*

Les autres, qui sont plus directement associés à l'idée de déplacement et à l'idée de groupe, sont justement ceux qu'il admet implicitement et qu'il ne croit même pas nécessaire d'énoncer. Cela revient à dire que les premiers axiomes (ceux qui sont énoncés) sont le fruit d'une expérience plus récente, tandis que les sous-entendus ont été assimilés les premiers par nous ; par conséquent la notion de groupe existait avant toutes les autres.

LA GÉOMÉTRIE DE STAUDT

On sait que Staudt a essayé de construire la géométrie sur des principes différents. Staudt n'admet que les axiomes suivants :

1° Par deux points on peut toujours mener une ligne droite.

2° Par trois points on peut toujours faire passer un plan.

3° Toute ligne droite ayant deux de ses points dans un plan est entièrement contenue dans ce plan.

4° Si trois plans ont un point commun, et un seulement, toute ligne droite coupera au moins un de ces trois plans.

Ces axiomes suffisent à établir toutes les propriétés *descriptives*, relatives aux intersections des lignes droites et des plans. Pour obtenir les propriétés métriques nous commençons par *définir* un faisceau harmonique de quatre droites en prenant comme définition la propriété descriptive bien connue. Alors le rapport anharmonique de quatre points est *défini* et enfin, en supposant que l'un de ces quatre points a été rejeté à l'infini, le rapport

de deux longueurs est *défini*.

C'est là le point faible de la théorie précédente, si séduisante qu'elle soit. Arriver à la notion de longueur en la regardant seulement comme un cas particulier du rapport anharmonique est un détour artificiel auquel on répugne. Ce n'est évidemment pas de cette manière que nos notions géométriques se sont formées.

Voyons maintenant si nous pouvons concevoir, sans introduire la notion de groupe et de mouvement, comment les notions qui servent de fondement à cette ingénieuse géométrie ont pris naissance. Voyons quelles expériences auraient pu nous conduire à formuler les axiomes énoncés plus haut.

Si la ligne droite n'est pas donnée comme un axe de rotation, elle ne peut être donnée que d'une façon, comme le trajet d'un rayon lumineux. Je veux dire que les expériences, toujours plus ou moins grossières, qui nous servent de point de départ, devront toutes être applicables au rayon lumineux et que nous devons définir la ligne droite comme une ligne pour laquelle les lois simples auxquelles le rayon lumineux obéit approximativement, seront rigoureusement vraies. L'expérience qu'il faudra faire pour vérifier le plus important de nos axiomes, le troisième, sera alors la suivante :

Soient deux fils tendus. Plaçons l'œil à l'extrémité de l'un de ces fils. Nous voyons que le fil est entièrement caché par son extrémité, ce qui nous apprend que le fil est rectiligne, c'est-à-dire suit le trajet d'un rayon lumineux. Faisons la même chose pour le second fil. Nous observons alors ce qui suit : ou bien il n'y aura aucune position de l'œil dans laquelle l'un des fils soit entièrement caché par l'autre, ou bien il y en aura une infinité.

Comment se présente la question du nombre des dimensions quand on suit cet ordre d'idées? Considérons toutes les positions de l'œil dans lesquelles l'un des fils est caché par l'autre. Supposons que dans l'une de ces positions le point A du premier fil soit caché par le point A' du second, le point B par le point B', le point C par le point C'. Nous découvrons alors que si le corps se déplace de telle façon que le point A soit toujours caché par le point A' et le point B par le point B', le point C reste toujours caché par le point C' et en général un point quelconque du premier fil reste caché par le même point du second fil par lequel il était caché avant que le corps ne se déplace. Nous exprimons ce fait en disant que, bien que le corps se soit déplacé, la position de l'œil n'a pas changé.

Nous voyons ainsi que la position de l'œil est définie par deux conditions, que A soit caché par A' et B par B'. Nous exprimons ce fait en disant que le lieu des points tel que les deux fils se cachent l'un l'autre a deux dimensions.

De même, supposons que pour une certaine position du corps, quatre fils, A, B, C, D cachent quatre points A', B', C', D' ; supposons que le corps se déplace, mais de telle manière que A, B et C continuent à cacher A', B' et C'. Nous découvrirons alors que D continue à cacher D' et nous exprimerons encore ce fait en disant que la position de l'œil n'a pas changé. Cette position sera donc définie par trois conditions et c'est pourquoi nous disons que l'espace a trois dimensions.

On remarquera que la loi ainsi découverte expérimentalement n'est vraie qu'approximativement. Mais ce n'est pas tout. Elle n'est même pas toujours vraie, parce que D ou D' peuvent avoir bougé en même temps que mon corps se déplaçait. Nous déclarons donc simplement que cette loi est souvent approximativement vraie.

Mais nous sommes désireux d'arriver à des axiomes géométriques qui soient rigoureusement et toujours vrais et nous échappons toujours à ce dilemme par le même artifice, en disant que nous convenons de considérer le changement observé comme la résultante de deux autres, l'un qui obéit rigoureusement à la loi et que nous attribuons au déplacement de l'œil et le second qui est généralement très petit et que nous attribuons soit à des altérations qualitatives, soit aux mouvements des corps extérieurs.

Nous n'avons pas pu éviter la considération des mouvements de l'œil et du corps. Cependant, nous pouvons dire que, à un certain point de vue, la géométrie de Staudt est surtout une géométrie visuelle tandis que celle d'Euclide est surtout musculaire.

Sans aucun doute des expériences inconscientes analogues à celles dont je viens de parler peuvent avoir joué un rôle dans la genèse de la géométrie ; mais elles ne sont pas suffisantes. Si nous avions procédé comme le suppose la géométrie de Staudt, quelque Apollonius aurait découvert les propriétés des polaires. Mais ce n'eût été que longtemps après que les progrès de la science auraient fait comprendre ce qu'est une longueur ou un angle. Nous aurions dû attendre quelque Newton pour découvrir les différents cas d'égalité des triangles. Et ce n'est évidemment pas de cette manière que les choses se sont passées.

L'AXIOME DE LIE

C'est Sophus Lie qui a le plus contribué à mettre en évidence l'importance de la notion de groupe et à établir les fondements de la théorie que je viens d'exposer. C'est lui, en fait, qui a donné sa forme actuelle à la théorie mathématique des groupes continus. Mais pour rendre possible l'application de cette théorie à la géométrie, il regarde comme nécessaire un nouvel axiome qu'il énonce en déclarant que l'espace est une *Zahlenmannigfaltigkeit* ; c'est-à-dire qu'à tout point d'une ligne droite correspond un nombre et *vice versa*.

Cet axiome est-il absolument nécessaire ? Et les autres principes que Lie a posés ne pourraient-ils pas en dispenser ? Nous avons vu plus haut, à propos de la continuité, que les groupes les plus connus pouvaient être, à un certain point de vue, répartis en trois classes ; toutes les opérations du groupe peuvent être divisées en faisceaux ; pour les groupes « discontinus », les différentes opérations du même faisceau ne sont qu'une seule opération répétée une fois, deux fois, trois fois, etc. ; pour les groupes « continus » proprement dits, les différentes opérations du même faisceau correspondent à différents nombres entiers, commensurables ou incommensurables ; enfin, pour les groupes qui peuvent être appelés « semi-continus », ces opérations correspondent à différents nombres commensurables.

Or, on peut démontrer qu'il n'existe pas de groupe discontinu ou semi-continu qui possède d'autres

propriétés que celles que l'expérience nous a amenés à adopter pour le groupe fondamental de la géométrie, et que je rappelle ici brièvement : Le groupe contient une infinité de sous-groupes, tous *gleichberechtigt*, que j'appelle sous-groupes rotatifs. Deux sous-groupes rotatifs ont un faisceau commun que j'appelle rotatif et qui est commun non seulement à deux, mais à une infinité de sous-groupes rotatifs. Enfin tout déplacement très petit du groupe peut être regardé comme la résultante de six déplacements appartenant à six faisceaux rotatifs donnés. Un groupe satisfaisant à ces conditions ne peut être ni discontinu, ni semi-continu.

Sans doute, c'est là une propriété excessivement mystérieuse et qu'il n'est pas facile de démontrer. Les géomètres qui l'ignoraient n'en ont pas moins saisi ses conséquences, comme, par exemple, quand ils ont découvert que le rapport d'une diagonale au côté d'un carré est incommensurable. C'est pour cette raison que l'introduction des incommensurables dans la géométrie est devenue nécessaire.

Le groupe doit donc être continu et il semble que l'axiome de Lie soit inutile.

Néanmoins, nous devons remarquer que la classification des groupes esquissée plus haut n'est pas complète ; on peut concevoir des groupes qui n'y soient pas inclus. Nous pourrions donc supposer, que notre groupe n'est ni discontinu, ni semi-continu, ni continu. Mais ce serait là une hypothèse compliquée. Nous la rejetons ou plutôt nous n'y pensons jamais, pour la raison qu'elle n'est pas la plus simple qui soit compatible avec les axiomes adoptés.

Le fondement de l'axiome de Lie reste encore à fournir.

LA GÉOMÉTRIE ET LA CONTRADICTION

En poursuivant toutes les conséquences des différents axiomes géométriques, ne sommes-nous jamais amenés à des contradictions ? Les axiomes ne sont pas des jugements analytiques *a priori* ; ce sont des conventions. Est-il certain que toutes ces conventions soient compatibles ?

Ces conventions, il est vrai, nous ont toutes été suggérées par des expériences, mais par des expériences grossières. Nous découvrons que certaines lois se vérifient approximativement et nous décomposons par convention le phénomène observé en deux autres : un phénomène purement géométrique qui obéit exactement à ces lois et un très petit phénomène perturbateur.

Est-il certain que cette décomposition soit toujours légitime ? Il est certain que ces lois sont *approximativement* compatibles, car l'expérience montre qu'elles sont toutes approximativement réalisées en même temps dans la nature. Mais est-il certain qu'elles seraient compatibles si elles étaient absolument rigoureuses ?

Pour nous la question n'est plus douteuse. La géométrie analytique est d'une construction solide et *tous* les axiomes ont été introduits dans les équations qui lui servent de point de départ : nous n'aurions pas pu écrire ces équations si les axiomes avaient été contradictoires. Maintenant que les équations sont

écrites, elles peuvent être combinées de toutes les manières possibles ; l'Analyse est la garantie que des contradictions ne pourront pas s'introduire.

Mais Euclide ne savait pas la géométrie analytique et cependant il n'a jamais douté un instant que ses axiomes ne soient compatibles. D'où lui venait sa confiance ? Etait-il dupe d'une illusion ? Et attribuait-il à nos expériences inconscientes plus de valeur qu'elles n'en possèdent réellement ? Ou peut-être, puisque l'idée du groupe préexistait en puissance en lui, en a-t-il eu quelque obscur instinct sans atteindre à sa notion distincte. Je laisserai cette question sans la résoudre quoique j'incline vers la seconde solution.

L'EMPLOI DES FIGURES

On peut se demander pourquoi la géométrie ne peut pas être étudiée sans figures. Cela est facile à expliquer. Quand nous commençons à étudier la géométrie, nous avons déjà fait, dans d'innombrables occasions, les expériences fondamentales qui ont permis à notre notion d'espace de prendre naissance. Mais ces expériences ont été faites sans méthode, sans attention scientifique et pour ainsi dire inconsciemment. Nous avons acquis la faculté de *nous représenter* les expériences géométriques familières sans être obligés d'avoir recours à leurs reproductions matérielles ; mais nous n'en avons pas encore déduit de conclusions logiques. Comment le ferons-nous ? Avant d'énoncer la loi, nous représenterons l'expérience en question d'une manière perceptible en la dépouillant aussi complètement que possible de toutes les circonstances accessoires ou perturbatrices, — exactement comme un physicien élimine dans ses expériences les sources d'erreurs systématiques. C'est ici que les figures sont nécessaires, mais elles sont un instrument à peine moins grossier que la craie qui sert à les tracer, et, de même que les objets matériels ne peuvent pas être représentés dans l'espace géométrique qui fait l'objet de nos études, nous ne pouvons nous les représenter que dans l'espace sensible. Ce ne sont donc pas des figures matérielles que nous étudions, mais nous nous servons d'elles simplement pour étudier quelque chose qui est plus élevé et plus subtil.

LA FORME ET LA MATIÈRE

Nous devons la théorie que je viens d'esquisser à Helmholtz et à Lie. Je ne diffère d'eux que sur un point ; mais la différence n'est probablement que dans l'expression et au fond nous sommes complètement d'accord.

Comme je l'ai expliqué plus haut, nous devons distinguer dans un groupe la forme et la matière. Pour Helmholtz et Lie la matière du groupe existait avant la forme et en géométrie la matière est une *Zahlenmannigfaltigkeit* à trois dimensions. *Le nombre des dimensions est donc posé antérieurement au groupe*. Pour moi au contraire la forme existe avant la matière. Les différentes manières dont un cube peut être superposé à lui-même et les différentes manières dont les racines d'une certaine équation peuvent être échangées constituent deux groupes isomorphes. Elles ne diffèrent que par la matière. Le mathématicien regarderait cette

différence comme superficielle et il ne distinguerait pas davantage entre ces deux groupes qu'entre un cube de verre et un cube de métal. Sous cet aspect le groupe existe antérieurement au nombre des dimensions.

Nous échappons aussi de cette façon à une objection qui a souvent été faite à Helmholtz et à Lie : « Mais votre groupe, objecte-t-on, présuppose l'espace ; pour le construire vous êtes obligés d'admettre un continu à trois dimensions. Vous procédez comme si vous saviez déjà la géométrie analytique. » Peut-être cette objection n'était-elle pas tout à fait juste ; le continu à trois dimensions que posaient Helmholtz et Lie était une sorte de grandeur non mesurable analogue aux grandeurs dont nous pouvons dire qu'elles sont devenues plus grandes ou plus petites, mais non qu'elles sont devenues deux fois ou trois fois plus grandes.

C'est seulement par l'introduction du groupe qu'ils en ont fait une grandeur mesurable, c'est-à-dire un véritable espace. Cependant l'origine de ce continu non mesurable à trois dimensions reste imparfaitement expliquée.

Mais dira-t-on, pour étudier un groupe, fût-ce dans ses propriétés formelles, il est nécessaire de le construire et il ne peut pas être construit sans matière. On pourrait aussi bien dire qu'on ne peut pas étudier les propriétés géométriques d'un cube sans supposer ce cube de bois ou de fer. Le complexe de nos sensations nous a sans doute pourvus d'une sorte de matière, mais il y a un contraste frappant entre la grossièreté de cette matière et la subtile précision de la forme de notre groupe. Il est impossible que ce soit là, à proprement parler, la matière d'un tel groupe. Le groupe des déplacements tel qu'il nous est donné directement par l'expérience est quelque chose d'une nature plus grossière ; il est, pouvons-nous dire, aux groupes continus à proprement parler ce que le continu physique est au continu mathématique. Nous étudions d'abord sa forme conformément à la formule du continu physique et comme il y a quelque chose qui répugne à notre raison dans cette formule, nous la rejetons et nous y substituons celle du groupe continu qui en puissance préexiste en nous, mais que nous ne connaissons initialement que par sa forme. La matière grossière qui nous est fournie par nos sensations n'a été qu'une béquille pour notre infirmité et n'a servi qu'à nous forcer à fixer notre attention sur l'idée pure que nous portions auparavant en nous.

CONCLUSIONS

La géométrie n'est pas une science expérimentale ; l'expérience n'est pour nous que l'occasion de réfléchir sur les idées géométriques qui préexistent en nous. Mais cette occasion est nécessaire ; si elle n'existait pas, nous ne réfléchirions pas, et si nos expériences étaient différentes, nos réflexions seraient sans doute aussi différentes. L'espace n'est pas une forme de notre sensibilité ; c'est un instrument qui nous sert, non à nous représenter les choses, mais à raisonner sur les choses.

Ce que nous appelons la géométrie n'est pas autre chose que l'étude des propriétés formelles d'un certain groupe continu ; si bien que nous pouvons dire que

l'espace est un groupe. La notion de ce groupe continu existe dans notre esprit antérieurement à toute expérience ; mais il en est de même pour la notion de beaucoup d'autres groupes continus ; par exemple celui qui correspond à la géométrie de Lobatchewsky. Il y a donc plusieurs géométries possibles et il reste à voir comment le choix se fait entre elles. Parmi les groupes mathématiques continus que notre esprit peut construire, nous choisissons celui qui s'écarte le moins de ce groupe brut, analogue au continu physique, que l'expérience nous a fait connaître comme groupe des déplacements.

Notre choix ne nous est donc pas imposé par l'expérience. Il est simplement guidé par l'expérience. Mais il reste libre : nous choisissons cette géométrie-ci plutôt que celle-là, non parce qu'elle est plus *vraie*, mais parce qu'elle est plus *commode*.

Demander si la géométrie d'Euclide est vraie et celle de Lobatchewsky fausse est aussi absurde que de demander si le système métrique est vrai et celui de la toise, du pied et du pouce faux. Transportés dans un autre monde, nous pourrions sans doute avoir une géométrie différente, non parce que notre géométrie aurait cessé d'être vraie, mais parce qu'elle serait devenue moins commode qu'une autre. Avons-nous le droit de dire que le choix entre les géométries nous est imposé par la raison et, par exemple, que la géométrie euclidienne est seule vraie parce que le principe de la relativité des grandeurs s'impose inévitablement à notre esprit ? Il est absurde, dit-on, de supposer qu'une longueur peut être égale à un nombre abstrait. Mais pourquoi ? Pourquoi est-ce absurde pour une longueur et n'est-ce pas absurde pour un angle ? Il n'y a qu'une réponse possible : cela nous paraît absurde parce que c'est contraire à nos habitudes de pensée. Sans doute la raison a ses préférences, mais ces préférences n'ont pas ce caractère impératif. Elle a ses préférences pour le plus simple, parce que toutes choses égales d'ailleurs, le plus simple est le plus commode. Ainsi nos expériences seraient également compatibles avec la géométrie d'Euclide et avec la géométrie de Lobatchewsky qui supposait la courbure de l'espace très petite. Nous choisissons la géométrie d'Euclide parce qu'elle est la plus simple. Si nos expériences étaient considérablement différentes, la géométrie d'Euclide ne suffirait plus à les représenter commodément, et nous choisirions une géométrie différente.

Qu'on ne dise pas que le groupe d'Euclide nous semble le plus simple parce qu'il est le plus conforme à quelque idéal préexistant qui a déjà un caractère géométrique ; il est plus simple parce que certains de ses déplacements sont échangeables, ce qui n'est pas vrai des déplacements correspondants du groupe de Lobatchewsky. Traduit dans le langage analytique, cela veut dire qu'il y a moins de termes dans les équations et il est clair qu'un algébriste qui ne saurait pas ce qu'est l'espace ou la ligne droite regarderait cela néanmoins comme une condition de simplicité.

En résumé, c'est notre esprit qui fournit une catégorie à la nature. Mais cette catégorie n'est pas un lit de Procuste dans lequel nous contraignons violemment la nature, en la mutilant selon que l'exigent nos besoins. Nous offrons à la nature un choix de lits parmi lesquels nous choisissons la couche qui va le mieux à sa taille.

TABLE DES MATIÈRES